

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Besançon

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

par

Mekki IDRISSI

**SUR UNE RESOLUTION DIRECTE DE PROBLEMES
PARABOLIQUES DANS DES OUVERTS
NON CYLINDRIQUES**

**EXISTENCE DE SOLUTIONS DANS $W^{2,p}(\Omega)$
D'EQUATIONS QUASI-LINEAIRES ELLIPTIQUES**

Soutenue le 1^{er} juillet 1983, devant la Commission d'Examen :

M. Bérilan Ph.

Président

Mme Lacroix M.-Th.

M. Pierre M.

Examineurs

THÈSE

présentée

À LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

par

Mekki IDRISSE

**SUR UNE RESOLUTION DIRECTE DE PROBLEMES
PARABOLIQUES DANS DES OUVERTS
NON CYLINDRIQUES**

**EXISTENCE DE SOLUTIONS DANS $W^{2,p}(\Omega)$
D'EQUATIONS QUASI-LINEAIRES ELLIPTIQUES**

Soutenue le 1^{er} juillet 1983, devant la Commission d'Examen :

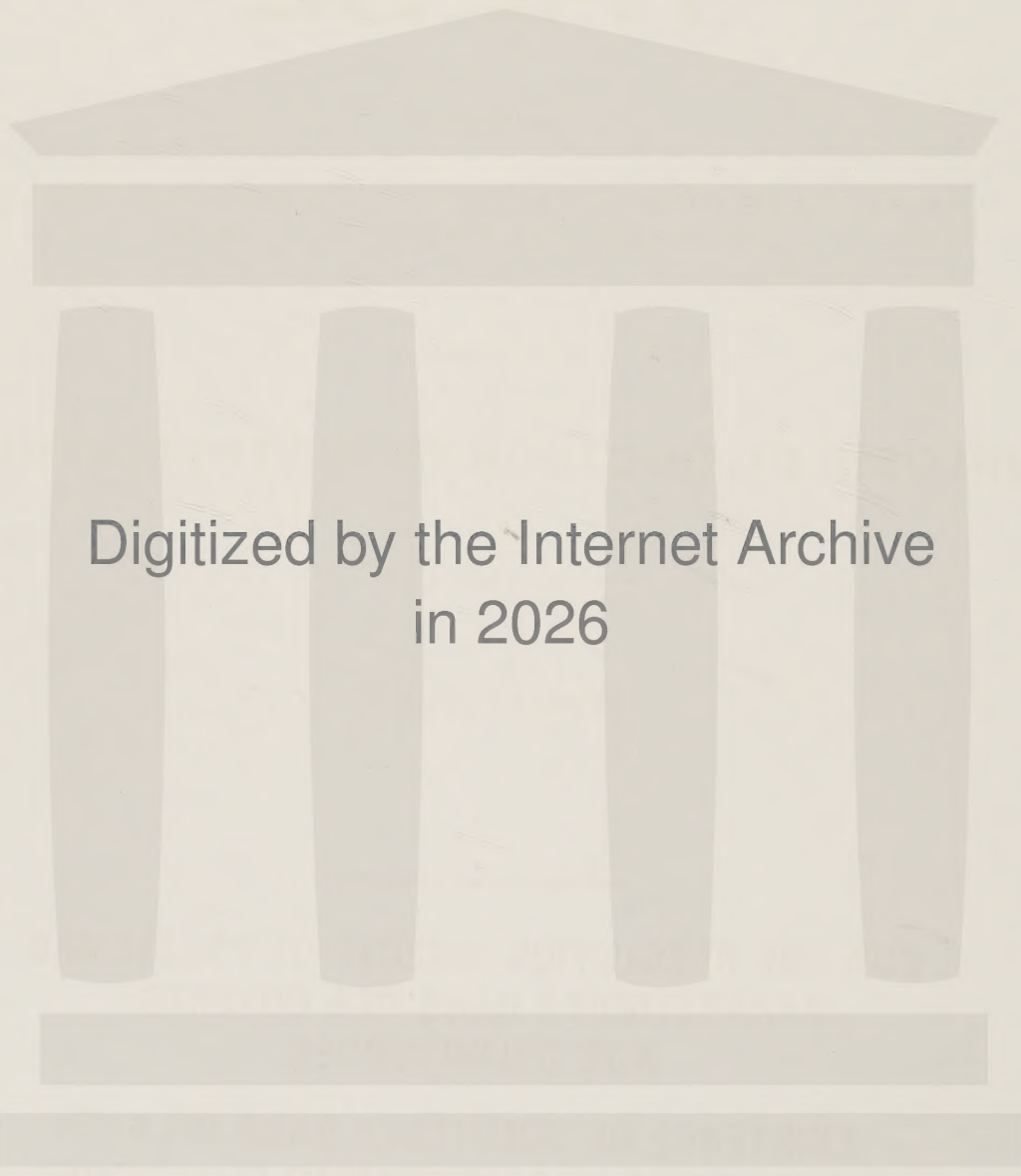
M. Bérilan Ph.

Président

Mme Lacroix M.-Th.

M. Pierre M.

Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546621_0023

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON**Président :** Monsieur le Professeur Jacques ROBERT**Présidents honoraires :** MM. THIEBAUT, LÉVÊQUE**FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES****DOYEN**M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique**ASSESSEURS**M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique
M. HEROLD Jean-Pierre, Maître-Assistant
Physiologie animale**DOYENS HONORAIRES**MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET, THIÉBAUT,
BERNARD, GALATRY**PROFESSEURS HONORAIRES**MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, PERROT,
PLUVINAGE, QUANTIN, REAL, THIRY, TRILLAT,
TRONCHET, UEBERSFELD**PROFESSEURS**

MM. ALBIGNAC Roland	: Biologie anim. et Ecologie	LAUDE Bernard	: Chimie organique
BANTEGNIE Robert	: Mathématique	LESAINTE Pierre	: Mathématiques I
BENILAN Philippe	: Mathématiques	LHOTE François	: Automatique
BERNARD Jean	: Chimie Physique	MANIA Jacky	: Géologie Structurale et appliquée
BIDAULT Michel	: Taxonomie expérimentale		
Mme BRIDE Michèle	: Zoologie Embryologie	MERIGOUX Henri	: Cristallographie et Synthèses minérales
BROQUET Paul	: Géologie		
BRUCKERT Sylvain	: Ecologie végétale	MIELLOU Jean-Claude	: Analyse numérique
BULABOIS Jean	: Physique Gle Optique	MILLET Bernard	: Botanique
CAPODANNO Pierre	: Mécanique théorique	MONTAGNER Hubert	: Psychophysiologie
CERUTTI Ernest	: Chimie appliquée	MOREELS Guy	: Astronomie
CHALEAT Raymond	: Mécanique appliquée	OLIVIER Marcel	: Electronique quantique
CHAMBAUDET Alain	: Chimie	OYTANA Claude	: Mécanique appliquée
CHARDON Jean-Claude	: Spectroscopie	PAGETTI Claude	: Corrosion et traitements de surface
CHAUVE Pierre	: Géologie minéralogie		
COUGNARD Jean	: Mathématiques	PARIZET Jean	: Mathématiques
DEVIN Claude	: Chimie 1er cycle	POTIER Robert	: Physique des solides
DOBREMEZ Jean-François	: Biologie	RANGHEARD Yves	: Géologie
DUBOUCHET Jacques	: Physiologie végétale	RIPPLINGER Jean	: Physiologie animale
GALATRY Louis	: Physique moléculaire	ROBERT Daniel	: Physique
GAUDEMER Yves	: Biochimie	ROBERT Guy	: Electrochimie
GIRARDET Claude	: Physique moléculaire	ROBERT Jacques	: Mathématiques I
GOMOT Lucien	: Zoologie-Embryologie	STRICKER Christophe	: Mathématiques
GOUARNE René	: Mathématiques	THEOBALD Jean-Gérard	: Spectroscopie hertzienne
GRAS Georges	: Mathématiques	THIEBAUT Jean	: Petrogr. minéralogie
GREMILLARD Jean	: Mathématiques	TREHEL Michel	: Informatique
JOLICARD Georges	: Physique moléculaire	VERNEAUX Jean	: Zoologie-Embryologie
KARCHE Jean-Paul	: Pétrographie Minéralogie	VIENOT Jean-Charles	: Physique Gle Optique
LALLEMENT Gérard	: Mécanique appliquée	VIGOUREUX Jean-Marie	: Physique
		WEIL Michel	: Mathématiques

Responsable des services administratifs : M. Jean-Marie RUNGE**Professeurs des Instituts Universitaires de Technologie dont les activités de Recherche sont rattachées à la Faculté des Sciences et Techniques de Besançon****I.U.T. de Besançon**MM. GENTYL Claude : Spécialité Chimie
ROUYER Bernard : Spécialité Mécanique**I.U.T. de Belfort**KAUFFMANN Jean-Marie : Spécialité Electrotechnique
MANDRET Gérard : Spécialité Electronique
PRENEL Jean-Pierre : Spécialité Physique
STAMON Georges : Spécialité Informatique
RONDOT Daniel : Spécialité Métallurgie**ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MICROMÉCANIQUE ET MICROTECHNIQUE****DIRECTEUR**M. le Professeur Raymond CHALEAT
Mécanique Appliquée**DIRECTEUR HONORAIRE**

M. le Professeur MESNAGE

MM. ANDRE Pierre	: Informatique Industrielle	HAUDEN Daniel	: Microélectronique
AVRAMESCO André	: Mathématiques	Mme LOSCO Lucette	: Mécanique
BESSION Raymond	: Electronique	ROQUES-CARMES	: Physico-Chimie des Matériaux
FAURE Alain	: Automatique		

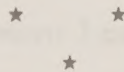
Responsable des services administratifs : Madame Jocelyne HAUTON

Monsieur Ph. BENILAN a bien voulu m'accueillir au sein de l'Equipe de Recherche d'Analyse non linéaire . Il a dirigé et orienté mes recherches avec patience . Ses conseils et suggestions m'ont grandement aidé . Il me fait l'honneur aujourd'hui de présider le jury de cette thèse . Qu'il veuille bien trouver ici le témoignage de ma vive gratitude .

Madame M. Th. LACROIX , à l'origine d'une partie de ce travail , m'a soutenu et encouragé avec générosité . Qu'elle soit assurée de ma profonde reconnaissance .

Je remercie chaleureusement Monsieur M. PIERRE pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et sa participation au jury.

Je remercie vivement Mademoiselle Th. PARIS pour la présentation qu'elle a apportée à cette thèse et Monsieur R. VRANA qui en a réalisé le tirage .



INTRODUCTION

On propose dans ce travail deux mémoires :

le premier sur une résolution directe d'équations paraboliques dans des ouverts non cylindriques , le second sur l'existence de solutions dans $W^{2,p}(\Omega)$ d'équations quasi-linéaires elliptiques du second ordre à partie principale divergente .

* * * * *

On considère le problème parabolique :

$$(I) \quad \begin{cases} u_t = \operatorname{div} \partial J(\operatorname{grad} u) + f & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega(0) \end{cases}$$

où Q est un ouvert non cylindrique , de frontière latérale Σ et de section $\Omega(t)$. $\Gamma(t)$ frontière de l'ouvert $\Omega(t)$ dépend de t de manière " à variation bornée " .

J fonction convexe dérivable de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

Quand $\Gamma(t)$ dépend régulièrement de t dans le sens qu'on puisse se ramener localement (ou globalement) par un changement de variables à des ouverts cylindriques , des variantes du problème (I) ont été étudiées par :

- H. FUJITA [9] en utilisant une méthode de pénalisation
 - H. ATTOUCH - A. DAMLAMIAN [3] , Y. YAMADA [15], [16]
- en appliquant des résultats relatifs aux équations d'évolution dans des espaces de Hilbert associées à des sous-différentiels de fonctions convexes s.c.i. dépendant du temps de type :

$$(E) \quad \frac{du}{dt} + \partial \varphi^t(u) \ni f \quad u(0) = u_0 .$$

On propose ici d'étendre les résultats d'existence de solutions de (E) établis par H. ATTOUCH et A. DAMLAMIAN [4] de sorte qu'on puisse étudier (I) directement dans l'ouvert non cylindrique Q .

Dans le premier chapitre, on montre un résultat abstrait d'existence de solutions fortes de (E).

Une méthode générale pour étudier (E) consiste à l'approcher par :

$$(E_\lambda) \quad \frac{du_\lambda}{dt} + \partial \varphi_\lambda^t(u_\lambda) = f(t) \quad , \quad u_\lambda(0) = u_0$$

où φ_λ^t est l'approximation Yosida de φ^t , $\lambda > 0$.

Le passage à la limite sur (E) s'obtient moyennant des estimations indépendantes de λ . On établit ces dernières sous des hypothèses portant sur les régularisées φ_λ^t . On suppose essentiellement que :

$$(H, E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } -1 < \theta < 1, \quad b \in L^{\frac{2}{1-\theta}}(0, T; \mathbb{R}^+) , \quad \alpha, \beta \\ \text{constantes positives, } a \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}) , \quad m \text{ mesure} \\ \text{positive bornée tels que, pour tout } \lambda > 0 \text{ et tout } x \in H: \\ t \longrightarrow e^{a(t)} (\varphi_\lambda^t(x) + \alpha \|x\|^2 + \beta) \\ \text{est à variation bornée continue à droite et vérifie :} \\ d [e^{a(t)} (\varphi_\lambda^t(x) + \alpha \|x\|^2 + \beta)] \leq \\ b(t) \| \partial \varphi_\lambda^t(x) \|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) dt + (1 + \|x\|^2) m \\ \text{au sens des mesures .} \end{array} \right.$$

Pour $\theta = 0$, on retrouve les hypothèses de H. ATTOUCH - A. DAMLAMIAN [4] et pour $\theta = \frac{1}{p}$, $p \geq 2$, celles de Y. YAMADA [15].

Au second chapitre, on formule le problème (I) sous la forme (E).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant toutes les sections $\Omega(t)$.

On traite alors (I) sous la forme (E) dans $H = L^2(\Omega)$.

Après avoir défini et caractérisé φ^t et φ_λ^t associées au problème (I), on obtient une expression formelle de $\frac{d\varphi_\lambda^t}{dt}$:

$$(1) \quad \frac{d\varphi_{\lambda}^t}{dt}(u) = - \int_{\Gamma(t)} \partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t) \cdot n(z, t) \text{grad } u_{\lambda}^t \cdot n(t, z) \rho(z, t) d\gamma(z)$$

où $u \in L^2(\Omega)$, $u_{\lambda}^t = (I + \lambda \partial \varphi^t)^{-1} u$, ρ fonction définissant la variation de $\Gamma(t)$ et $n(t, z)$ normale en $z \in \Gamma(t)$.

On justifiera alors, sous des hypothèses de régularité sur Q l'expression (1) dans le cas particulier de l'équation de la chaleur. On montrera que le calcul explicite de $\frac{d\varphi_{\lambda}^t}{dt}$ - dans ce cas - fait apparaître la formule d'Hadamard et (1) s'écrit :

$$(2) \quad \frac{d\varphi_{\lambda}^t}{dt}(u) = - \frac{1}{2} \int_{\Gamma(t)} \rho(z, t) \left(\frac{\partial u_{\lambda}^t}{\partial n} \right)^2 d\gamma(z).$$

Ce qui permettra de vérifier l'hypothèse (H.E) et d'obtenir en conséquence un résultat d'existence.

Les facilités techniques offertes par la dimension $N = 1$, permettent de vérifier l'hypothèse (H.E) dans le cas particulier de (I) :

$$\begin{cases} u_t = \beta(u_x)_x + f & \text{dans } Q \\ u(0, t) = u(S(t), t) = 0 & 0 < t < T \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans }]0, S(0)[\end{cases}$$

où $Q = \{(x, t) \mid 0 < t < T, 0 < x < S(t-)\}$

S fonction de $[0, T[$ dans $\mathbb{R}^+$, partout définie et vérifiant :

$$S(t) - S(t+h) \leq \int_t^{t+h} b(\tau) d\tau$$

où $b \in L^{\frac{4}{2-\theta}}(0, T)$; $0 < \theta \leq 1$.

$S(t-)$ désigne la limite à gauche de S en t .

On établira pour ce cas, un résultat d'existence, d'unicité et de régularité de solutions.

Dans le second mémoire , on s'intéresse au problème de Dirichlet correspondant à une équation quasi-linéaire elliptique à partie principale divergentielle :

$$(II) \quad \begin{cases} \operatorname{div} a(x, u, Du) + b(x, u, Du) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Une méthode pour résoudre (II) ou de manière générale les équations quasi-linéaires elliptiques de type :

$$(*) \quad a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} u + \beta(x, u, Du) = 0$$

consiste à se ramener à l'application d'un théorème de point fixe .

Pour cela , on fixe la fonction u qui intervient comme argument dans les coefficients a et b (ou a_{ij} et β) ; on obtient alors une équation linéaire elliptique du second ordre à laquelle on applique les résultats de la théorie linéaire . Ce qui permet de construire un opérateur T qui à chaque u fait correspondre la solution du problème linéaire associé . Les points fixes de T sont alors solution de (II) (ou (*) avec une condition de Dirichlet) .

Dans le cas des solutions classiques , (II) et plus généralement (*) , ont été étudiées et développées par O.A. LADYZENSKAJA , N.N. URAL'TCEVA [8] , J. SERRIN [10] , N.S. TRUDINGER [7] , [12] , [13] .

Ils ramènent le problème d'existence , par l'estimation de Schauder (des solutions d'équations linéaires dans $C^{2, \delta}(\Omega)$ $0 < \delta < 1$) et le théorème de point fixe de Leray-Schauder ou de Schaefer , à un problème d'estimations à priori dans $C^{1, \delta}(\Omega)$. Estimations qu'ils établissent ensuite sous des hypothèses de régularité des coefficients et certaines restrictions de croissance en Du de ces coefficients ainsi que leurs dérivées .

Pour obtenir des solutions dans $W^{2, p}(\Omega)$, $p > N$, on procède de la

même façon en utilisant à la place de l'estimation de Schauder celle d'AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [2] dans $W^{2,p}(\Omega)$. On ramènera, de la même façon, le problème d'existence par le théorème de point fixe de Schaefer à établir des estimations à priori dans $C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$, $0 < \delta < 1 - \frac{N}{p}$, $p > N$. C'est l'objet du chapitre I.

Dans le chapitre II, de la même manière, et avec les mêmes techniques que pour les solutions classiques, on établit successivement, les estimations $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|Du\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ et $\|Du\|_{L^\infty(\Omega)}$ pour une solution à priori u de (II) dans $W^{2,p}(\Omega)$.

On supposera essentiellement que :

$$a = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$$

$$a_i : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1$$

$$b : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue}$$

$$\nu(|z|(1+|p|)^\tau) |\xi|^2 \leq \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(x, z, p) \xi_i \xi_j \leq \mu(|z|)(1+|p|)^\tau |\xi|^2$$

$$\xi \in \mathbb{R}^N, (x, z, p) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \tau > -1.$$

Les restrictions de croissance sont de même type que dans [7] :

$$(1+|p|) |D_z a_i| + |D_{x_i} a_i| + |b| \leq \mu(|z|)(1+|p|)^{\tau+2}.$$

Quant à l'estimation höldérienne du gradient on utilise un résultat de LADYZENSKAJA [8].

Pour l'estimation de $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, on supposera que :

$$\frac{1}{\nu(|z|)} \mathcal{B}(x, z, p) \operatorname{sign} z \leq \mu_1 |p| + \mu_2$$

où $\mathcal{B}(x, z, p) = D_{x_i} a_i + D_z a_i p_i + b$, μ_1 et μ_2 constantes ≥ 0 , et on appliquera à la place du principe du maximum classique, le principe du maximum de BONY [4] dans $W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$.

On notera enfin que les hypothèses dans lesquelles on s'est placé à savoir a_i de classe C^1 et b continue sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, ne permettent pas d'envisager de solutions classiques de (II) .

Pour les notations :

Du désigne le gradient . Il arrive qu'on note indifféremment $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ou

D_{x_i} les dérivées partielles .

PREMIERE PARTIE

SUR UNE RESOLUTION DIRECTE DE PROBLEMES PARABOLIQUES DANS DES OUVERTS NON CYLINDRIQUES

<u>CHAPITRE I</u>	:	<u>Théorèmes abstraits .</u>	
1.1 :		Enoncé des théorèmes	2
1.2 :		Démonstration du théorème 1.1.....	7
1.3 :		Démonstration du théorème 1.2.....	23
1.4 :		Démonstration du théorème 1.3.....	26
<u>CHAPITRE II</u>	:	<u>Applications à des problèmes paraboliques</u> <u>dans des domaines non cylindriques.</u>	
II.1 :		Calcul formel de $\frac{d}{dt} \varphi_{\lambda}^t$	34
II.2 :		Problème (2-1) en dimension 1.....	36
II.3 :		Cas de l'équation de la chaleur.....	53
APPENDICE			67
BIBLIOGRAPHIE			70

CHAPITRE I

THEOREMES ABSTRAITS

Dans tout ce qui suit, H désigne un espace de Hilbert réel, séparable, muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et de la norme associée $\|\cdot\|$; $\{\varphi^t; t \in [0, T[\}$ une famille de fonctions convexes semi-continues inférieurement et propres (i.e. $\varphi^t \not\equiv +\infty$) de H dans $]-\infty, +\infty[$.

On rappelle que :

$$\begin{aligned} D(\varphi^t) &= \{x \in H; \varphi^t(x) < +\infty\} \\ \partial \varphi^t(u) &= \{w \in H; \varphi^t(v) \geq \varphi^t(u) + (w, v-u); \forall v \in D(\varphi^t)\} \\ D(\partial \varphi^t) &= \{u \in D(\varphi^t); \partial \varphi^t(u) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

On considère le problème d'évolution :

$$(1-1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \partial \varphi^t(u(t)) \ni f(t) & \text{p.p. } t \in]0, T[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

On désigne par solution forte sur $]0, T[$ de (1-1) toute fonction u définie et continue sur $[0, T]$ à valeurs dans H , absolument continue sur tout intervalle compact contenu dans $]0, T[$ et donc presque partout dérivable sur $]0, T[$; $u(t)$ appartenant à $D(\partial \varphi^t)$ pour presque tout t et satisfaisant (1-1).

1.1.- ENONCE DES THEOREMES.

Dans cette section , on énonce trois théorèmes d'existence et d'unicité de solutions de (1-1) .

Théorème 1.1 :

On suppose qu'il existe une suite de fonctions φ_n
 $\varphi_n : [0, T[\times H \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ et tout t dans $[0, T[$,
 $x \longrightarrow \varphi_n(t, x)$ est convexe différentiable , de dérivée $x \longrightarrow A_n(t, x) \in H$
 lipschitzienne de rapport h_n avec $A_n(., 0) \in L^\infty(0, T ; H)$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in H$, $t \longrightarrow \varphi_n(t, x)$ est à varia -
 tion bornée et continue à droite sur $[0, T[$. On suppose, en outre,
 qu'il existe $-1 < \theta < 1$, $b \in L^{\frac{2}{1-\theta}}(0, T ; \mathbb{R}^+)$ et m mesure positive
 bornée tels que :

$$(1-2) \quad d\varphi_n(t, x) \leq b(t) \|A_n(t, x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) dt + (1 + \|x\|^2) m$$

au sens des mesures .

(iii) Pour tout $t \in [0, T[$ et $x \in H$, $n \longrightarrow \varphi_n(t, x)$ est
 croissante et $\varphi^t(x) = \sup_n \varphi_n(t, x)$.

Alors on a les conclusions suivantes :

a) Pour tout $u_0 \in \overline{D(\varphi^0)}$ et $f \in L^1(0, T ; H)$ avec
 $\sqrt{t} f \in L^2(0, T ; H)$, il existe une unique solution forte u de (1-1),
 cette solution vérifie : $\sqrt{t} \frac{du}{dt} \in L^2(0, T ; H)$ et $t \longrightarrow t \varphi^t(u(t))$
 est à variation bornée .

b) Si de plus $u_0 \in D(\varphi^0)$ et $f \in L^2(0, T ; H)$, alors ,
 u vérifie : $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T ; H)$, $t \longrightarrow \varphi^t(u(t))$ est à variation bornée.

Dans l'énoncé qui va suivre, on applique le théorème précédent en prenant comme approximation des φ^t , l'approximation de Yosida, dont on rappelle la définition et quelques propriétés :

Pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varphi_{\lambda}^t(x) &= \inf \left\{ \varphi^t(y) + \frac{1}{2\lambda} \|x - y\|^2, y \in H \right\}, \quad x \in H \\ &= \varphi^t(J_{\lambda}^t x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - J_{\lambda}^t x\|^2 \end{aligned}$$

où :

$$J_{\lambda}^t x = (I + \lambda \partial \varphi^t)^{-1} x.$$

J_{λ}^t est une contraction de H .

• $x \longrightarrow \varphi_{\lambda}^t(x)$ est convexe, différentiable sur H , de dérivée $\partial \varphi_{\lambda}^t$ égale à l'approximation de Yosida :

$$(\partial \varphi^t)_{\lambda} = \frac{1}{\lambda} (I - J_{\lambda}^t) \quad \text{de } \partial \varphi^t$$

et lipschitzienne de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Théorème 1.2 :

On suppose que les φ^t vérifient les hypothèses :

(i) Il existe C_1 et C_2 constantes positives telles que pour tout $t \in [0, T[$ et $x \in H$:

$$(1-3) \quad \varphi^t(x) + C_1 \|x\|^2 + C_2 \geq 0.$$

(ii) Il existe $-1 < \theta < 1$, $b \in L^{\frac{2}{1-\theta}}(0, T; \mathbb{R}^+)$, α et β deux constantes positives, $a \in L^{\infty}(0, T; \mathbb{R})$ et m mesure positive bornée tels que, pour tout $\lambda > 0$, tout $x \in H$:

$$t \longrightarrow e^{a(t)} [\varphi_{\lambda}^t(x) + \alpha \|x\|^2 + \beta]$$

est à variation bornée continue à droite et vérifie :

$$\begin{aligned} (1-4) \quad d[e^{a(t)} (\varphi_{\lambda}^t(x) + \alpha \|x\|^2 + \beta)] &\leq \\ &\leq b(t) \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) dt + (1 + \|x\|^2) m \\ &\text{au sens des mesures.} \end{aligned}$$

Alors on a les conclusions du théorème 1.1.

Comme on le montrera dans la section 1.3 , le théorème 1.2 se déduit du théorème 1.1 par un changement de variable en t .

Dans les deux résultats précédents , les hypothèses portent sur les suites approximant les φ^t qui généralement ne sont pas des données des problèmes de type (1-1) .

On énonce alors un théorème où les hypothèses portent sur les φ^t :

Théorème 1.3 :

On suppose que la famille $\{ \varphi^t ; t \in [0, T[]$ vérifie la condition suivante :

(H) Pour tout $r > 0$, il existe b_r et h_r fonctions définies sur $[0, T[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $b_r \in L^{\frac{2p}{p-1}}(0, T)$, $p \geq 2$; h_r croissante telles que pour tout $t_0 \in [0, T]$ et tout $x_0 \in D(\varphi^{t_0})$ $\|x_0\| \leq r$, il existe une fonction $x : [t_0, T[\rightarrow H$ vérifiant :

$$(1-5) \quad \|x(t) - x_0\| \leq \left(\int_{t_0}^t b_r(s) ds \right) \left(\varphi^{t_0}(x_0) + K_r \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$(1-6) \quad \varphi^t(x(t)) \leq \varphi^{t_0}(x_0) + (h_r(t) - h_r(t_0)) \left(\varphi^{t_0}(x_0) + K_r \right)$$

où K_r désigne une constante positive ne dépendant que de r .

Alors on a les conclusions du théorème 1.1 .

La démonstration sera faite à la section 1.4 .

Remarque 1.1 :

Si u et v sont respectivement solutions fortes de

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial \varphi^t(u(t)) \ni f(t)$$

$$\frac{dv}{dt}(t) + \partial \varphi^t(u(t)) \ni g(t)$$

on obtient aisément en utilisant la monotonie de $\partial \varphi^t$ dans H :

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(s) - v(s)\| + \int_s^t \|f(\tau) - g(\tau)\| dt$$

pour $0 \leq s \leq t \leq T$.

D'où l'unicité de la solution de (1-1) pour $f = g$, $s = 0$ et $v(0) = u(0) = u_0 \in H$.

Remarque 1.2 :

Les théorèmes 1.1 et 1.2 sont des extensions des résultats de H. Attouch - A. Damlamian dans [4], qu'on retrouve pour $\theta = 0$. On a néanmoins pris volontairement les fonctions convexes s.c.i. φ^t partout définies et continues à droite en t pour simplifier la présentation des résultats et les démonstrations. Alors que dans [4], ces fonctions sont supposées définies seulement sur un ensemble de complémentaire négligeable dans $[0, T]$ et à variations essentielles bornées.

Remarque 1.3 :

Le théorème 1.3 est une version légèrement modifiée du résultat abstrait de Y. Yamada [15]. L'hypothèse (H) est du même type que A2 de [15], à la différence près qu'on a pris $b_r \in L^{\frac{2p}{p-1}}(0, T)$ (*) et qu'on s'est contenté de h_r croissante au lieu de h_r absolument continue.

(*) Alors que pour $p = 2$ dans [15], $b_r \in L^2(0, T)$.

Remarque 1.4 :

Les hypothèses de Y. Yamada (c'est-à-dire de type (H)) s'inspirent de celle de N. Kenmochi [13] .

En effet , ce dernier suppose :

qu'il existe $r \rightarrow C(r)$ fonction décroissante dans $[0, +\infty[$ vérifiant :

Pour tout $r \geq 0$, $0 \leq t \leq T$, $z \in D(\varphi^t) \cap B(0, r)$ et $t \leq s \leq T$, il existe $\bar{z} \in D(\varphi^s)$ telle que :

$$\begin{aligned} \|\bar{z} - z\| &\leq C(r) |s - t| \\ \varphi^s(\bar{z}) &\leq \varphi^t(z) + C(r) |t - s| (1 + |\varphi^t(z)|) \end{aligned}$$

Sous cette hypothèse N. Kenmochi traite le problème (1-1) sous forme d'inéquation variationnelle par une méthode de semi-discrétisation en t.

On remarquera qu'elle rentre dans le cadre du théorème 1.3 pour $p = +\infty$.

Remarque 1.5 :

Avec une démarche analogue à celle de Ph. Bénéilan et H. Brézis dans [7] , on peut établir à partir du théorème 1.2 un résultat d'existence et d'unicité du problème périodique :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \partial \varphi^t(u(t)) \ni f(t) \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

avec les conditions supplémentaires suivantes sur les φ^t :

- a) $D(\varphi^T) \subset D(\varphi^0)$
- b) $\liminf_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^t(x)}{\|x\|} = \ell(t)$

où ℓ fonction mesurable sur $[0, T]$ telle que $\int_0^T \ell(t) dt = +\infty$.

On utilise essentiellement le théorème de point fixe de Browder - Petryshyn. Y. Yamada a montré un résultat dans ce sens avec des hypothèses de type (H) [16] .

1.2.- DEMONSTRATION DU THEOREME 1.1 .

La démarche de la démonstration est similaire à celle du théorème 2.1 de H. Attouch - A. Damlamian [4] .

A- Lemmes et estimations préliminaires .

Dans ce paragraphe , on établit quelques résultats qu'on utilisera par la suite .

Proposition 1.1 :

Soit $\psi : [0, T] \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

1) Pour tout $t \in [0, T[$, $x \longrightarrow \psi(t, x)$ est convexe différentiable de dérivée $x \longrightarrow \partial \psi(t, x)$ lipschitzienne de rapport h et $t \longrightarrow \partial \psi(., x) \in L^\infty(0, T ; H)$.

2) Il existe C_1 et C_2 deux constantes positives telles que :

$$(1-7) \quad \psi(t, x) + C_1 \|x\|^2 + C_2 \geq 0 \quad \forall t \in [0, T[, \forall x \in H .$$

3) Pour tout $x \in H$, $t \longrightarrow \psi(t, x)$ est à variation bornée, continue à droite et il existe $-1 \leq \theta < 1$, $b \in L^{\frac{2}{1-\theta}}(0, T ; \mathbb{R}^+)$ et m mesure positive bornée tels que :

$$d\psi(t, x) \leq b(t) \|\partial \psi(t, x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) + (1 + \|x\|^2) m$$

au sens des mesures .

Alors on a les conclusions suivantes :

a) Pour tout $v \in \mathcal{C}([0, T] ; H) \cap W^{1,1}(0, T ; H)$, $t \longrightarrow \psi(t, v(t))$ est à variation bornée sur $[0, T[$ et vérifie pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$(1-8) \quad \psi(t, v(t)) \leq \psi(s, v(s)) + \int_s^t \left(\partial \psi(\tau, v(\tau)) , \frac{dv}{d\tau} \right) d\tau \\ + \int_s^t b(\tau) \|\partial \psi(\tau, v(\tau))\|^{1+\theta} (\|v(\tau)\|^{1-\theta} + 1) d\tau + \int_{[s, t[} (1 + \|v(\tau)\|^2) dm(\tau)$$

soit encore :

$$(1-8)' \quad d\psi(t, v(t)) \leq \left[\left(\partial\psi(t, v(t)) , \frac{dv}{dt} \right) + b(t) \|\partial\psi(t, v(t))\|^{1+\theta} \left(\|v(t)\|^{1-\theta} + 1 \right) \right] dt + \left(1 + \|v(t)\|^2 \right) dm(t)$$

au sens des mesures .

b) Si pour $v_0 \in H$, $f \in L^2(0, T; H)$, v est solution de

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) + \partial\psi(t, v(t)) \ni f(t) & \text{p.p. } t \in]0, T[\\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

alors :

$$(1-9) \quad \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^2(0, T; H)} \leq C$$

où C dépend seulement de façon croissante de $\psi(0, v_0)$, $\|b\|_{L^{\frac{2}{1-\theta}}(0, T)}$

et $\|f\|_{L^2(0, T; H)}$.

Preuve :

a) Soient $0 \leq s \leq t \leq T$.

$$\begin{aligned} \psi(t, v(t)) - \psi(s, v(s)) &= [\psi(t, v(t)) - \psi(t, v(s))] + [\psi(t, v(s)) - \psi(s, v(s))] \\ &\leq (\partial\psi(t, v(t)), v(t) - v(s)) + \int_s^t b(\tau) \|\partial\psi(\tau, v(s))\|^{1+\theta} (\|v(s)\|^{1-\theta} + 1) d\tau \\ &\quad + (1 + \|v(s)\|^2) m([s, t[) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Comme} \quad (1 + \|v(s)\|^2) m([s, t[) &= (1 + \|v(t)\|^2) m([0, t[) \\ &\quad - (1 + \|v(s)\|^2) m([0, s[) + (\|v(s)\|^2 - \|v(t)\|^2) m([0, t[) \end{aligned}$$

on pose alors :

$$\alpha(\sigma) = \psi(\sigma, v(\sigma)) - (1 + \|v(\sigma)\|^2) m([0, \sigma[) .$$

Pour $r, \sigma \in [0, T[$, $\sigma \leq r$, l'inégalité précédente s'écrit :

$$(1-10) \quad \alpha(r) - \alpha(\sigma) \leq (\partial \psi(r, v(r)), v(r) - v(\sigma)) + \\ + \int_{\sigma}^r b(\tau) \|\partial \psi(\tau, v(\sigma))\|^{1+\theta} (\|v(\sigma)\|^{1-\theta} + 1) d\tau + \\ + (\|v(\sigma)\|^2 - \|v(r)\|^2) m([0, r[) .$$

D'après l'hypothèse 1) :

$$\|\partial \psi(\tau, v(\sigma))\| \leq \|\partial \psi(\tau, v(\tau))\| + h \|v(\sigma) - v(\tau)\|$$

d'où :

$$\|\partial \psi(\tau, v(\sigma))\|^{1+\theta} (\|v(\sigma)\|^{1-\theta} + 1) \leq \|\partial \psi(\tau, v(\tau))\|^{1+\theta} (\|v(\tau)\|^{1-\theta} + 1) + \\ + M(\tau) \gamma(|\sigma - \tau|)$$

où :

$$M(\tau) = h^{1+\theta} \left(\|\partial \psi(\tau, 0)\|^{1+\theta} + \|v\|_{L^{\infty}(0, T; H)}^{1+\theta} + \|v\|_{L^{\infty}(0, T; H)}^{1-\theta} \right) \\ \gamma(|\sigma - \tau|) = \max_{\tau \leq t \leq \sigma} \left(\|v(t) - v(\sigma)\|^{1+\theta} + \|v(t) - v(\sigma)\|^{1-\theta} \right)$$

$M \in L^{\infty}(0, T)$, γ continue croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, $\gamma(0) = 0$.

(1-10) permet alors d'avoir :

$$\alpha(r) - \alpha(\sigma) \leq (\partial \psi(r, v(r)), v(r) - v(\sigma)) + \\ + \int_{\sigma}^r b(\tau) \|\partial \psi(\tau, v(\tau))\|^{1+\theta} (\|v(\tau)\|^{1-\theta} + 1) d\tau + \\ + \gamma(|r - \sigma|) \int_{\sigma}^r M(\tau) d\tau + (\|v(\sigma)\|^2 - \|v(r)\|^2) m(]0, r[) .$$

α est donc à variation positive absolument continue ; par conséquent ,

α est presque partout dérivable :

$$\frac{d\alpha}{dr} \leq \left(\partial \psi(r, v(r)), \frac{dv}{dr} \right) + b(r) \|\partial \psi(r, v(r))\|^{1+\theta} (\|v(r)\|^{1-\theta} + 1) \\ - m(]0, r[) \frac{d}{dr} \|v(r)\|^2 .$$

Comme $\alpha(r) \leq \alpha(\sigma) + \int_{\sigma}^r \frac{d\alpha}{d\tau}(\tau) d\tau :$

$$\begin{aligned} \alpha(r) &\leq \alpha(\sigma) + \int_{\sigma}^r \left(\partial \psi(\tau, v(\tau)), \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right) d\tau \\ &\quad + \int_{\sigma}^r b(\tau) \|\partial \psi(\tau, v(\tau))\|^{1+\theta} (\|v(\tau)\|^{1-\theta} + 1) d\tau \\ &\quad - \int_{[\sigma, r[} \frac{d}{d\tau} \|v(\tau)\|^2 m([0, \tau[) . \end{aligned}$$

En intégrant par partie $\int_{[\sigma, r[} \frac{d}{d\tau} \|v(\tau)\|^2 m([0, \tau[)$ et revenant à ψ ,

on retrouve (1-8), ce qui achève la démonstration de a).

b) On reprend (1-8) avec $\partial \psi(\tau, v(\tau)) = f(\tau) - \frac{dv}{d\tau}(\tau)$ et $s = 0$.

$$\begin{aligned} \psi(t, v(t)) &\leq \psi(0, v_0) + \int_0^t \left(f(\tau) - \frac{dv}{d\tau}(\tau), \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^t b(\tau) \|f(\tau) - \frac{dv}{d\tau}(\tau)\|^{1+\theta} (\|v(\tau)\|^{1-\theta} + 1) d\tau \\ &\quad + \int_{[0, t[} (1 + \|v(\tau)\|^2) dm(\tau) \end{aligned}$$

d'où en tenant compte de l'hypothèse 2) de la proposition :

$$\begin{aligned} (1-11) \quad \int_0^t \left\| \frac{dv}{d\tau} \right\|^2 d\tau &\leq \psi(0, v_0) + C_1 \|v(t)\|^2 + C_2 + \int_0^t \left(f(\tau), \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^t b(\tau) \left(\|f(\tau)\| + \left\| \frac{dv}{d\tau} \right\| \right)^{1+\theta} (\|v(\tau)\|^{1-\theta} + 1) d\tau \\ &\quad + \int_{[0, t[} (1 + \|v(\tau)\|^2) dm(\tau) . \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Young on a les majorations :

$$\bullet \quad \int_0^t \left(f(\tau), \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right) d\tau \leq \frac{1}{3} \int_0^t \left\| \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right\|^2 d\tau + 3 \int_0^t \|f(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\bullet \quad \int_0^t b(\tau) \left(\|f(\tau)\| + \left\| \frac{dv}{d\tau} \right\| \right)^{1+\theta} (\|v(\tau)\|^{1-\theta} + 1) d\tau \leq \\ \leq \frac{1}{3} \int_0^t \left\| \frac{dv}{d\tau} \right\|^2 d\tau + \frac{1}{3} \int_0^t \|f(\tau)\|^2 d\tau + 3^{\frac{1+\theta}{1-\theta}} \int_0^t b(\tau)^{\frac{2}{1-\theta}} (\|v(\tau)\|^2 + 1) d\tau$$

On pose :

$$N(t) = \sup \left\{ \|v(s)\| ; 0 \leq s \leq t \leq T \right\} .$$

(1-11) permet alors d'avoir :

$$(1-12) \quad \int_0^t \left\| \frac{dv}{d\tau} \right\|^2 d\tau \leq C_3 N(t)^2 + C_4$$

où C_3 et C_4 constantes positives ne dépendent que de $\psi(0, v_0)$, $\|f\|_{L^2(0, T; H)}$, $\|b\|_{L^{\frac{2}{1-\theta}}(0, T)}$, m .

(1-9) s'obtient par application du :

Lemme 1.1 [4] :

Sous la condition (1-12) on a :

$$(1-13) \quad \left\| \frac{dv}{d\tau} \right\|_{L^2(0, T; H)} \leq 4^{(8C_3 t + 1)} (C_3 \|v_0\|^2 + C_4)$$

ce qui achève la preuve de la proposition 1.1 .

Proposition 1.2 :

Sous les hypothèses 1) , 2) et 3) de la proposition

1.1 , soient $f \in L^2(0, T; H)$, $v_0 \in H$ et v solution forte de :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + \partial \psi(t, v(t)) \ni f(t) & \text{p.p. } t \in]0, T[\\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

avec $v \in W^{1,2}(0, T; H)$.

Alors on a les estimations :

$$(1-14) \quad \|v\|_{L^\infty(0, T; H)} \leq M$$

$$(1-15) \quad \int_0^T \psi(t, v(t)) dt \leq M_1$$

$$(1-16) \quad \int_0^t t \left\| \frac{dv}{dt} \right\|^2 dt \leq 3 \int_0^T \psi(t, v(t)) dt + M_2$$

où M , M_1 et M_2 dépendent seulement et de manière croissante de $\|v_0\|$, $\|f\|_{L^1(0, T; H)}$ et $\|\sqrt{t} f\|_{L^2(0, T; H)}$.

Preuve :

On procède de la même façon que H. Attouch - A.

Damlamian [4] .

Soit $w \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap W^{1,2}(0, T; H)$ solution de :

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt}(t) + \partial \psi(t, w(t)) \ni 0 & \text{p.p. } t \in]0, T[\\ w(0) = w_0 & w_0 \in H \end{cases}$$

De la monotonie de $\partial \psi$ on déduit :

$$(1-17) \quad \|v(t) - w(t)\| \leq \|v_0 - w_0\| + \int_0^T \|f(\tau)\| d\tau$$

soit encore :

$$\|v(t)\| \leq \|w(t)\| + \|v_0 - w_0\| + \int_0^T \|f(\tau)\| d\tau$$

d'où en utilisant (1-13) :

$$\|v(t)\| \leq C + \|v_0\| + \int_0^T \|f(\tau)\| d\tau$$

où C constante positive dépendant de $\|w_0\|$, $\psi(0, w_0)$ et $\|b\|_{L^{\frac{2}{1-\alpha}}(0, T)}$,

ce qui donne (1-14) .

$$\begin{aligned}\psi(t, w(t)) &\geq \psi(t, v(t)) + \left(w(t) - v(t), f(t) - \frac{dv}{dt}(t) \right) \\ &\geq \psi(t, v(t)) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t) - v(t)\|^2 + \left(w(t) - v(t), f(t) - \frac{dw}{dt}(t) \right).\end{aligned}$$

On intègre cette inégalité entre 0 et T . D'où , en tenant compte de

(1-17) :

$$\begin{aligned}\int_0^T \psi(t, v(t)) dt &\leq \frac{1}{2} \|v_0 - w_0\|^2 + \int_0^T \psi(t, w(t)) dt \\ &\quad + \int_0^T \|w(t) - v(t)\| \left\| f(t) - \frac{dv}{dt}(t) \right\| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|v_0 - w_0\|^2 + \int_0^T \psi(t, w(t)) dt \\ &\quad + \left(\|v_0 - w_0\| + \int_0^T \|f(t)\| dt \right) \int_0^T \left\| f(t) - \frac{dv}{dt}(t) \right\| dt.\end{aligned}$$

D'où d'après (1-9) :

$$\int_0^T \psi(t, v(t)) dt \leq M_1$$

où M_1 constante positive dépendant de manière croissante de $\|f\|_{L^1(0, T; H)}$

et $\|v_0\|$.

Pour montrer (1-16) , on reprend l'inégalité (1-8) .

Soient $0 \leq s \leq t \leq T$.

$$\begin{aligned}\psi(t, v(t)) &\leq \psi(s, v(s)) + \int_s^t \left(\partial \psi(\tau, v(\tau)), \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right) d\tau \\ &\quad + \int_s^t b(\tau) \|f(\tau) - \frac{dv}{d\tau}(\tau)\|^{1+\theta} (\|v(\tau)\|^{1-\theta} + 1) d\tau \\ &\quad + \int_{[s, t[} (1 + \|v(\tau)\|^2) dm(\tau)\end{aligned}$$

d'où en tenant compte de (1-14) :

$$\begin{aligned} \psi(t, v(t)) &\leq \psi(s, v(s)) + (1+M^2) m([s, t[) + \int_s^t \left(f(\tau) - \frac{dv}{d\tau}(\tau), \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right) d\tau \\ &\quad + \int_s^t b(\tau) (1+M^{1-\theta}) \left(\|f(\tau)\| + \left\| \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right\| \right)^{1+\theta} d\tau. \end{aligned}$$

On écrit alors cette inégalité au sens des mesures :

$$\begin{aligned} d\psi(t, v(t)) &\leq (1+M^2) dm(t) + \left(f(t) - \frac{dv}{dt}(t), \frac{dv}{dt}(t) \right) dt \\ &\quad + (1+M^{1-\theta}) \left(\|f(t)\| + \left\| \frac{dv}{dt}(t) \right\| \right)^{1+\theta} dt \end{aligned}$$

d'où en multipliant par t et en intégrant entre 0 et T :

$$\begin{aligned} \int_0^T t d\psi(t, v(t)) &\leq (1+M^2) \int_{[0, T[} t dm(t) + \int_0^T t \left(f(t), \frac{dv}{dt}(t) \right) dt \\ &\quad - \int_0^T t \left\| \frac{dv}{dt}(t) \right\|^2 dt + (1+M^{1-\theta}) \int_0^T b(t) \left(\|f(t)\| + \left\| \frac{dv}{dt}(t) \right\| \right)^{1+\theta} dt. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Young pour majorer convenablement les termes en $\frac{dv}{dt}(t)$:

$$\begin{aligned} \bullet \quad &\int_0^T t (1+M^{1-\theta}) b(t) \left(\|f(t)\| + \left\| \frac{dv}{dt}(t) \right\| \right)^{1+\theta} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \int_0^T t \left\| \frac{dv}{dt}(t) \right\|^2 dt + \frac{1}{3} \int_0^T t \|f(t)\|^2 dt + 3^{\frac{1+\theta}{1-\theta}} (1+M^2) \int_0^T t (b(t))^{\frac{2}{1-\theta}} dt. \\ \bullet \quad &\int_0^T t \left(f(t), \frac{dv}{dt}(t) \right) dt \leq \frac{1}{3} \int_0^T t \left\| \frac{dv}{dt}(t) \right\|^2 dt + 3 \int_0^T t \|f(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} (1-18) \quad &\int_0^T t d\psi(t, v(t)) + \frac{1}{3} \int_0^T t \left\| \frac{dv}{dt} \right\|^2 dt \leq \\ &3^{\frac{1+\theta}{1-\theta}} (1+M^2) \int_0^T t b^{\frac{2}{1-\theta}}(t) dt + \left(1 + \frac{1}{3}\right) \int_0^T t \|f(t)\|^2 dt \leq M_0 \end{aligned}$$

M_0 constante positive dépendant de manière croissante de $\|f\|_{L^1(0,T;H)}$

$$\|\sqrt{t} f\|_{L^2(0,T;H)} \quad \text{et} \quad \|v_0\|.$$

Comme
$$\int_0^T t d\psi(t, v(t)) = T\psi(T, v(T)) - \int_0^T \psi(t, v(t)) dt$$

(1-18) s'écrit alors :

$$\frac{1}{3} \int_0^T t \left\| \frac{dv}{dt} \right\|^2 dt \leq \int_0^T \psi(t, v(t)) dt - T\psi(T, v(T)) + M_0.$$

Or d'après (1-7) et (1-14) :

$$-T\psi(T, v(T)) \leq C_1 \|v(T)\|^2 + C_2 \leq C_1 M^2 + C_2.$$

D'où (1-16) , ce qui achève la preuve de la proposition 1.2 .

B- Approximations et passage à la limite .

Comme $t \longrightarrow \varphi_n(t, x)$ est mesurable , $t \longrightarrow A_n(t, x)$ est scalairement mesurable , H étant séparable , elle est fortement mesurable . Soit $u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$, $t \longrightarrow A_n(t, u(t))$ est dans $L^2(0, T; H)$ car $\|A_n(t, u(t))\| \leq \|A_n(t, 0)\| + h_n \|u(t)\|$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $f \in L^2(0, T; H)$, on considère :

$$(1-19) \quad \begin{cases} \frac{du_n}{dt} + A_n(t, u_n(t)) = f(t) \\ u_n(0) = u_0 \end{cases}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz , il existe une unique solution $u_n \in \mathcal{C}([0, T]; H) \cap W^{1,2}(0, T; H)$ de (1-19) .

L'existence de solutions de (1-1) revient à établir un passage à la limite sur (1-19) . A cette fin on rappelle les deux résultats suivants :

Proposition 1.3 [1] :

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel , $\mathcal{A}$ un opérateur monotone faiblement fermé , $\mathcal{B}^n$ une suite d'opérateurs maximaux monotones dans $\mathcal{H}$ vérifiant :

$$\mathcal{B}^n \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathcal{B}$$

(i.e. convergence au sens des résolvantes)

Soient $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites bornées de $\mathcal{H}$ telles que :

$$w_n + \mathcal{B}^n v_n \ni g , \quad w_n \in \mathcal{A} v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

où $g \in \mathcal{H}$.

Alors si v_n converge faiblement dans $\mathcal{H}$ vers v , v vérifie :

$$w + \mathcal{B} v \ni g \text{ avec } w \in \mathcal{A} v .$$

Proposition 1.4 [2] :

Soit $\varphi_n(t, \cdot)$, $\varphi(t, \cdot)$ une suite d'intégrandes convexes normales sur H vérifiant :

(i) Pour tout $t \in [0, T[$, $\varphi_n(t, \cdot)$ converge en croissant vers $\varphi(t, \cdot)$.

(ii) La fonctionnelle ϕ_n définie par :

$$\phi_n(v) = \int_0^T \varphi_n(t, v(t)) dt$$

est semi-continue inférieurement propre sur $\mathcal{H} = L^2(0, T; H)$.

Alors :

$$\partial \phi_n \xrightarrow{\mathcal{R}} \partial \phi \text{ dans } \mathcal{H}$$

où ϕ est la fonctionnelle associée à $\varphi(t, \cdot) = \sup_n \varphi_n(t, \cdot)$.

On applique ces deux propositions avec $\mathcal{A} = \frac{d}{dt}$ dans $\mathcal{H}$ avec $D(\mathcal{A}) = \left\{ u \in W^{1,2}(0, T; H) ; u(0) = u_0 \right\}$.

$$\mathcal{B}^n = \partial \phi_n = \left\{ u, v \in \mathcal{H} \text{ tels que } v(t) = A_n(t, u(t)) \text{ p.p. } t \right\} .$$

L'application de la proposition 1.3 pour le passage à la limite dans (1-19), compte-tenu de l'unicité de la solution u_n de (1-19) d'une part et d'autre part du fait que :

$$\left(\left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H)} \leq C, u_n(0) = u_0 \right) \Rightarrow \left(\|u_n\|_{L^2(0,T;H)} \leq C' \right)$$

se ramène à établir que $\frac{du_n}{dt}$ est bornée dans $L^2(0,T;H)$.

Ce qui s'obtient par application de la proposition 1.1 avec $\psi = \varphi_n$ et $v = u_n$ dans (1-9) après avoir vérifié l'hypothèse (1-7).

Lemme 1.2 :

Sous les hypothèses du théorème 1.1 il existe C_1 et C_2 constantes positives telles que :

$$(1-20) \quad \varphi_n(t, x) + C_1 \|x\|^2 + C_2 \geq 0$$

pour tout $t \in [0, T[$ et $x \in H$.

Preuve :

L'hypothèse (ii) du théorème permet d'avoir pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in H$:

$$(1-21) \quad \varphi_n(t, x) \leq \varphi_n(s, x) + \int_s^t b(\tau) \|A_n(\tau, x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) d\tau \\ + (1 + \|x\|^2) m([s, t]).$$

Soit $\tilde{\varphi}_n(., x)$ la régularisée à gauche de $\varphi_n(., x)$; de (1-21) on obtient :

$$(1-22) \quad \tilde{\varphi}_n(T, x) \leq \varphi_n(s, x) + \int_s^T b(\tau) \|A_n(\tau, x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) d\tau \\ + (1 + \|x\|^2) m([s, T]).$$

On prend $n = 1$, $\tilde{\varphi}_1(T, .)$ est convexe continue sur H , il existe donc α et β constantes positives telles que :

$$\forall x \in H \quad \varphi_1(T, x) + \alpha \|x\| + \beta \geq 0 .$$

D'où de (1-22) :

$$\begin{aligned} \varphi_1(s, x) + \alpha \|x\| + \beta + \int_s^T b(\tau) \|A_1(\tau, x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) d\tau \\ + (1 + \|x\|^2) m(]0, T[) \geq 0 . \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \|A_1(\tau, x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) \leq \|A_1(\tau, 0)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) \\ + h^{1+\theta} (\|x\|^{1+\theta} + \|x\|^2) \end{aligned}$$

$$\text{et que } \varphi_n(s, x) \geq \varphi_1(s, x) \quad \forall n \geq 1$$

on obtient (1-20) . $\square$

a) Cas où $u_0 \in D(\varphi^\circ)$.

De l'estimation (1-9), on obtient que $\frac{du_n}{dt}$ est bornée dans $L^2(0, T; H)$ (on remarquera que la condition $u_0 \in D(\varphi^\circ)$ est utilisée au niveau de l'inégalité (1-11) dans le sens que $\varphi_n(0, u_0) \leq \varphi^\circ(u_0)$) .

Donc :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \quad \text{dans } w - L^2(0, T; H)$$

$$\forall x \in H, \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(u_n(t), x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (u(t), x) .$$

D'autre part , en reprenant (1-8) de la proposition 1.1 , on obtient :

$$\sup_{[0, T]} \varphi_n(., u(.)) \leq \text{constante indépendante de } n$$

$(\varphi_n(., u_n(.)))_{n \in \mathbb{N}}$ est , par conséquent , relativement compacte dans $L^1(0, T; \mathbb{R})$. On peut donc en extraire une sous-suite convergente dans $L^1(0, T; \mathbb{R})$. On la notera toujours de la même façon .

$$\varphi_n(., u_n(.)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w \quad \text{dans } L^1(0, T; \mathbb{R}) .$$

Comme $\varphi_n(., u_n(.))$ est croissante :

$$\forall n \geq n_0 \quad \varphi_n(t, u_n(t)) \geq \varphi_{n_0}(t, u_n(t))$$

on passe à la limite inférieure de $x \longrightarrow \varphi_{n_0}(t, x)$:

$$w(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t, u_n(t)) \geq \liminf \varphi_{n_0}(t, u(t)) .$$

En prenant le sup en $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$(1-23) \quad w(t) \geq \varphi^t(u(t)) \quad t \in [0, T[.$$

D'autre part :

$$\varphi_n(t, u(t)) \geq \varphi_n(t, u_n(t)) + \left(u(t) - u_n(t) , f(t) - \frac{du_n}{dt} \right)$$

qu'on intègre sur $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi_n(t, u(t)) dt &\geq \int_0^T \varphi_n(t, u_n(t)) dt + \int_0^T (u(t) - u_n(t) , f(t)) dt \\ &\quad - \int_0^T \left(u(t) , \frac{du_n}{dt}(t) \right) dt + \frac{1}{2} \|u_n(T)\|^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|^2 . \end{aligned}$$

Compte-tenu des convergences suivantes :

- $\varphi_n(., u(.)) \longrightarrow \varphi^*(u(.))$ dans $L^1(0, T)$
(d'après Beppo-Levi et 1-20)
- $\varphi_n(., u_n(.)) \longrightarrow w$ dans $L^1(0, T; \mathbb{R})$
- $u_n \longrightarrow u$ et $\frac{du_n}{dt} \longrightarrow \frac{du}{dt}$ dans $L^2(0, T; H)$ faible
- $u_n(T) \longrightarrow u(T)$ dans H faible

on obtient :

$$\int_0^T \varphi^t(u(t)) dt \geq \int_0^T w(t) dt$$

ce qui donne avec (1-23) :

$$w(t) = \varphi^t(u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T] .$$

Par conséquent :

$$(1-24) \quad \varphi_n(., u_n(.)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi^*(u(.)) \quad \text{dans } L^1(0, T; \mathbb{R})$$

donc toute la suite converge et $\varphi^*(u(.))$ est à variation bornée .

Ce qui achève le cas où $u_0 \in D(\varphi^0)$ dans la démonstration du théorème 1.1 .

b) Effet régularisant .

On utilise la proposition 1.2 avec $\psi = \varphi_n$.

Les inégalités (1-14) (1-15) et (1-16) deviennent pour $u_0 \in D(\varphi^0)$ et $f \in L^2(0, T; H)$:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^\infty(0, T; H)} &\leq M \\ \int_0^T \varphi_n(t, u_n(t)) dt &\leq M_1 \\ \int_0^T t \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|^2 dt &\leq 3 \int_0^T \varphi_n(t, u_n(t)) dt + M_2 \end{aligned}$$

où M , M_1 et M_2 constantes positives dépendant de manière croissante de $\|u_0\|$, $\|f\|_{L^1(0, T; H)}$ et $\|\sqrt{t} f\|_{L^2(0, T; H)}$.

En tenant compte de (1-24) , on passe à la limite dans la deuxième inégalité ci-dessus , d'où :

$$(1-25) \quad \int_0^T \varphi^t(u(t)) dt \leq M_1 .$$

D'autre part , comme $w \longrightarrow \int_0^T t \|w(t)\|^2 dt$ est convexe continue

sur $L^2(0, T; H)$, donc faiblement s.c.i. , on peut donc passer à la limite dans la 3^{eme} inégalité ci-dessus :

$$(1-26) \quad \int_0^T t \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \leq \int_0^T \varphi^t(u(t)) dt + M_2 .$$

A l'aide de (1-25) , (1-26) on va maintenant établir l'effet régularisant sur la condition initiale :

Soit $u_0 \in \overline{D(\varphi^0)}$.

Il existe alors $(u_{0,m})_m \in \mathbf{N} \subset D(\varphi^0)$ telles que $u_{0,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u_0$ dans H .

On considère $f \in L^1(0, T; H)$ avec $\sqrt{t} f \in L^2(0, T; H)$, $(f_m)_m \in \mathbf{N}$ telle que $f_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ dans $L^1(0, T; H)$, $f_m \in L^2(0, T; H)$ et $\sqrt{t} f_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sqrt{t} f$ dans $L^2(0, T; H)$.

On note par u_m la solution de :

$$(1-27) \quad \begin{cases} \frac{du_m}{dt} + \partial \varphi^t(u_m) \ni f_m \\ u_m(0) = u_{0,m} \end{cases}$$

Pour tout $t \in [0, T]$ et tout $m, p \in \mathbf{N}$ on a :

$$\|u_m(t) - u_p(t)\| \leq \|u_{0,m} - u_{0,p}\| + \int_0^T \|f_m(\tau) - f_p(\tau)\| d\tau .$$

On en déduit alors que $(u_m)_m \in \mathbf{N}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, T]; H)$, donc converge uniformément vers u .

$$\int_0^T t \left\| \frac{du_m}{dt} \right\|^2 dt \leq 3 \int_0^T \varphi^t(u_m(t)) dt + M_2 .$$

Or :

$$\int_0^T \varphi^t(u_m(t)) dt \leq M_1$$

d'où :

$$(1-28) \quad \left\| \sqrt{t} \frac{du_m}{dt} \right\|_{L^2(0, T; H)} \leq C$$

C constante ne dépendant pas de m .

Par conséquent :

$$\sqrt{t} \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H) .$$

On montre qu'on peut passer à la limite dans (1-27) .

Soit $\epsilon > 0$; pour tout $w \in L^2(\epsilon, T; H)$:

$$(1-29) \quad \int_{\epsilon}^T \varphi^t(w(t)) dt \geq \int_{\epsilon}^T \varphi^t(u_m(t)) dt + \int_{\epsilon}^T \left(f(t) - \frac{du_m}{dt}, w(t) - u_m(t) \right) dt$$

Comme $\frac{du_m}{dt} \longrightarrow \frac{du}{dt}$ dans $L^2(\epsilon, T; H)$ faible

$$u_m \longrightarrow u \quad \text{dans } \mathcal{C}([0, T]; H)$$

$$v \longrightarrow \int_{\epsilon}^T \varphi^t(v(t)) dt \text{ est s.c.i. pour } v \in L^2(\epsilon, T; H)$$

on obtient par passage à la limite dans (1-29) :

$$\int_{\epsilon}^T \varphi^t(w(t)) dt \geq \int_{\epsilon}^T \varphi^t(u(t)) dt + \int_{\epsilon}^T \left(f(t) - \frac{du}{dt}, w(t) - u(t) \right) dt$$

ce qui entraîne que pour presque tout $t \in [0, T[$:

$$f(t) - \frac{du}{dt}(t) \in \partial \varphi^t(u(t)) .$$

On vérifie enfin que $t \longrightarrow t \varphi^t(u(t))$ est à variation bornée . Pour cela, il suffit de reprendre (1-8)¹ de la proposition 1.1 et de la multiplier par t .

1.3.- DEMONSTRATION DU THEOREME 1.2 .

Le théorème 1.2 se ramène , moyennant un changement de variable , à appliquer le théorème 1.1 .

On procède de la même façon que H. Attouch - A. Damlamian [4] .

Proposition 1.5 [4] :

Soit φ une intégrande normale sur $[0, T] \times H$,

$\xi : [0, \hat{T}] \longrightarrow [0, T]$ une bijection bilipschitzienne croissante .

On pose :

$$\hat{\varphi}(\tau, x) = \frac{d\xi}{d\tau}(\tau) \varphi(\xi(\tau), x)$$

$$\hat{f}(\tau) = f \circ \xi(\tau) \frac{d\xi}{d\tau}(\tau)$$

Alors $\hat{\varphi}$ est une intégrande normale, pour $f \in L^2(0, T; H)$, $\hat{f} \in L^2(0, \hat{T}; H)$.

Si u est solution de :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + \partial \varphi^t(u(t)) \ni f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Alors $v(\tau) = u \circ \xi(\tau)$ est solution de :

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau}(\tau) + \partial \hat{\varphi}(\tau, v(\tau)) \ni \hat{f}(\tau) \\ v(0) = u_0 \quad u_0 \in H \end{cases}$$

On notera que si φ^t est convexe , $\hat{\varphi}(\tau, \cdot)$ l'est aussi .

On choisit pour ξ la bijection bilipschitzienne croissante :

$$\xi\left(\int_0^t e^{-a(s)} ds\right) = t$$

$$\xi^{-1}(t) = \int_0^t e^{-a(s)} ds \quad \text{avec} \quad \hat{T} = \int_0^T e^{-a(s)} ds .$$

On pose :

$$\psi_n(t, x) = e^{a(t)} [\varphi_\lambda(t, x) + \alpha \|x\|^2 + \beta]$$

$$\hat{\psi}_n(t, x) = \psi_n(\xi(\tau), x)$$

$$\text{où } \lambda = \frac{1}{n}.$$

On vérifie que $(\hat{\psi}_n(\tau, x))_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait aux conditions du théorème 1.1.

$\hat{\psi}_n$ est définie pour tout $\tau \in [0, \hat{T}]$ et continue à droite.

$x \longrightarrow \hat{\psi}_n(\tau, x)$ est convexe, différentiable, de dérivée :

$$\hat{A}_n(\tau, x) = [A_\lambda(\xi(\tau), x) + 2\alpha x] \exp a(\xi(\tau)).$$

$(\hat{\psi}_n(\tau, x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et admet pour limite :

$$\hat{\psi}(\tau, x) = e^{a(t)} [\varphi^t(x) + \alpha \|x\|^2 + \beta] \quad \text{avec } t = \xi(\tau).$$

1) vérification de l'hypothèse (i) du théorème 1.1.

Soit y fixé dans H , $t \longrightarrow \psi_n(t, y)$ étant à variation bornée, il existe C_n constante positive telle que :

$$\psi_n(t, y) = e^{a(t)} (\varphi_\lambda(t, y) + \alpha \|y\|^2 + \beta) \leq C_n$$

soit encore :

$$\varphi^t(J_\lambda^t y) + \frac{n}{2} \|y - J_\lambda^t y\|^2 + \alpha \|y\|^2 + \beta \leq C_n e^{-a(t)} \leq C'_n.$$

De l'hypothèse (i) du théorème 1.2, on déduit qu'à partir d'un certain ordre de n , on a l'existence de deux constantes positives M_n et $\hat{M}_n$ telles que :

$$\text{pour tout } t \in [0, T] \quad \|A_\lambda(t, y)\| \leq M_n$$

$$\text{pour tout } \tau \in [0, \hat{T}] \quad \|\hat{A}_\lambda(\tau, y)\| \leq \hat{M}_n.$$

2) vérification de (1-4).

On note d'abord que si g est une fonction à variation bornée sur $[0, T]$ vérifiant pour μ mesure positive :

$$dg \leq \mu \quad \text{au sens des mesures}$$

alors $\hat{g} = g \circ \xi$ satisfait :

$$d\hat{g} \leq \hat{\mu} \quad \text{au sens des mesures.}$$

où $\hat{\mu}$ est la mesure image de μ par ξ .

Soit $\eta \in D([0, \hat{T}])$ (i.e. η fonction test) :

$$\int_0^{\hat{T}} \eta(\tau) d\hat{\psi}_n(\tau, x) \leq \int_0^T \eta \circ \xi^{-1}(t) b(t) \|A_\lambda(t, x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) dt \\ + \int_0^T \eta \circ \xi^{-1}(t) (1 + \|x\|^2) dm(t) .$$

Soit $\hat{m}$ la mesure image sur $]0, \hat{T}[$ de m par ξ :

$$\int_0^{\hat{T}} \eta(\tau) d\hat{\psi}_n(\tau, x) \leq \int_0^{\hat{T}} \eta(\tau) \frac{d\xi}{d\tau}(\tau) b(\xi(\tau)) \|A_\lambda(\xi(\tau), x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) d\tau \\ + \int_0^{\hat{T}} \xi(\tau) (1 + \|x\|^2) d\hat{m}(\tau) .$$

De l'expression de $\hat{A}_n(\tau, x)$ en fonction de $A_\lambda(\xi(\tau), x)$ on déduit l'existence d'une constante positive C telle que :

$$d\hat{\psi}_n(\tau, x) \leq C b \circ \xi(\tau) \|\hat{A}_n(\tau, x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) d\tau + (1 + \|x\|^2) \hat{m} .$$

On applique alors les conclusions du théorème 1.1 :

Pour $u_0 \in \overline{D(\varphi^0)}$, $\hat{f} \in L^2(0, \hat{T}; H)$ il existe une unique solution forte v de :

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} + e^{a(\xi(\tau))} \partial \varphi^{\xi(\tau)}(v(\tau)) + 2\alpha e^{a(\xi(\tau))} v(\tau) \ni \hat{f}(\tau) \\ v(0) = u_0 \end{cases} \quad \text{p.p. } \tau \in]0, \hat{T}[$$

De la proposition 1.5 et d'un théorème de perturbation lipschitzienne [8] on déduit les conclusions du théorème 1.2.

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.2.

1.4. - DEMONSTRATION DU THEOREME 1.3 .

Le théorème 1.3 résulte du théorème 1.2 . On va donc vérifier que l'hypothèse (H) rentre dans le cadre des hypothèses du théorème 1.2 .

a) On vérifie d'abord (i) .

On remarque que (H) entraîne , en particulier , l'existence de K_r (pour tout $r > 0$) constante positive satisfaisant :

$$(1-30) \quad \varphi^t(x) + K_r \geq 0 \quad t \in [0, T[, x \in H , \|x\| \leq r .$$

Soit $v_0 \in D(\varphi^0)$ fixé ; il existe $v : [0, T] \longrightarrow H$ vérifiant :

$$(1-31) \quad v(0) = v_0 \quad \|v(t)\| \leq r_0 \quad \varphi^t(v(t)) \leq M_0$$

pour tout $t \in [0, T]$, r_0 et M_0 constantes positives .

- Pour $\|x\| \leq r_0$, (1-30) entraîne l'hypothèse (i) .
- Pour $\|x\| > r_0$, on pose alors :

$$\mu(t) = \frac{1}{\|x - v(t)\|} , \quad w(t) = \mu(t) x + (1 - \mu(t)) v(t) .$$

On a $0 < \mu(t) \leq 1$ et $\|w(t)\| \leq r_0$ pour $0 \leq t \leq T$.

La convexité de φ^t et (1-30) permettent alors d'avoir :

$$\mu(t) \varphi^t(x) + (1 - \mu(t)) \varphi^t(v(t)) \geq \varphi^t(w(t)) \geq -K_{r_0}$$

soit encore :

$$\varphi^t(x) \geq - (K_{r_0} + M_0) \mu(t)^{-1} \geq - (K_{r_0} + M_0) (\|x\| + r_0)$$

$$\varphi^t(x) + (K_{r_0} + M_0) (\|x\| + r_0) \geq 0 \quad \forall x \in H , \|x\| \geq r_0 .$$

Il existe donc deux constantes positives C_1 et C_2 telles que :

$$(1-32) \quad \varphi^t(x) + C_1 \|x\|^2 + C_2 \geq 0 .$$

b) Vérification de l'hypothèse (ii) .

★ On montre d'abord que :

$$(1-33) \quad \|J_{\lambda}^t x\| \leq C_3 \|x\| + C_4 \quad 0 \leq t < T$$

où C_3 et C_4 constantes positives $0 < \lambda \leq 1$.

On reprend v_0 et v de (1-31) . On a alors :

$$(1-34) \quad \varphi_{\lambda}^t(x) \leq \varphi^t(v(t)) + \frac{1}{2\lambda} \|x - v(t)\|^2 \leq M_0 + \frac{1}{2\lambda} (\|x\| + r_0)^2$$

On en déduit que $t \longrightarrow \varphi_{\lambda}^t(x)$ est bornée .

Comme :

$$\varphi^t(v(t)) - \varphi^t(J_{\lambda}^t x) \geq \frac{1}{\lambda} (x - J_{\lambda}^t x, v(t) - J_{\lambda}^t x)$$

on a :

$$M_0 - \varphi^t(J_{\lambda}^t x) \geq \frac{1}{\lambda} \|J_{\lambda}^t x\|^2 - \frac{1}{\lambda} \|J_{\lambda}^t x\| (\|x\| + r_0) - \frac{r_0}{\lambda} \|x\|$$

$$\frac{1}{\lambda} \|J_{\lambda}^t x\|^2 \leq \frac{1}{\lambda} \|J_{\lambda}^t x\| (\|x\| + r_0) + M_0 + \frac{1}{\lambda} r_0 \|x\| - \varphi^t(J_{\lambda}^t x)$$

soit encore en tenant compte de (1-32) :

$$\frac{1}{\lambda} \|J_{\lambda}^t x\|^2 \leq \frac{1}{\lambda} \|J_{\lambda}^t x\| (\|x\| + r_0) + M_0 + \frac{1}{\lambda} r_0 \|x\| + C_1 \|J_{\lambda}^t x\| + C_2$$

d'où (1-33) .

★★ On montre maintenant que $t \longrightarrow \varphi_{\lambda}^t(x)$ est à variation bornée et vérifie (1-4) .

On pose :

$$r = \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 < \lambda \leq 1}} \|J_{\lambda}^t x\| .$$

Puisque $J_{\lambda}^s x \in D(\partial \varphi^s) \subset D(\varphi^s)$, d'après (H) , il existe

$v : [s, T] \longrightarrow H$ avec $v(s) = J_{\lambda}^s x$ telle que :

$$\|v(t) - J_{\lambda}^s x\| \leq \left(\int_s^t b_r(s) ds \right) \left(\varphi^s(J_{\lambda}^s x) + K_r \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\varphi^t(v(t)) \leq \varphi^s(J_{\lambda}^s x) + (h_r(t) - h_r(s)) (\varphi^s(J_{\lambda}^s x) + K_r) .$$

Comme :

$$\varphi^t(v(t)) \geq \varphi^t(J_{\lambda}^t x) + \frac{1}{\lambda} (x - J_{\lambda}^t x, v(t) - J_{\lambda}^t x)$$

d'où pour $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} (1-35) \quad & (h_r(t) - h_r(s)) (\varphi_{\lambda}^s(x) + K_r) + \varphi^s(J_{\lambda}^s x) - \varphi^t(J_{\lambda}^t x) \geq \\ & \geq \frac{1}{\lambda} (x - J_{\lambda}^t x, J_{\lambda}^s x - J_{\lambda}^t x) \\ & - \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\| (\varphi_{\lambda}^s(x) + K_r)^{\frac{1}{p}} \int_s^t b_r(\tau) d\tau . \end{aligned}$$

$$\text{Or} \quad \frac{1}{\lambda} (x - J_{\lambda}^t x, J_{\lambda}^s x - J_{\lambda}^t x) \geq \frac{1}{2\lambda} (\|x - J_{\lambda}^t x\|^2 - \|x - J_{\lambda}^s x\|^2) .$$

De (1-35) on obtient (en explicitant $\varphi^s(J_{\lambda}^s x)$ et $\varphi^t(J_{\lambda}^t x)$) :

$$\begin{aligned} & (h_r(t) - h_r(s)) (\varphi_{\lambda}^s + K_r) \geq \\ & \geq \varphi_{\lambda}^t(x) - \varphi_{\lambda}^s(x) - \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\| (\varphi_{\lambda}^s(x) + K_r)^{\frac{1}{p}} \int_s^t b_r(\tau) d\tau . \end{aligned}$$

C'est-à-dire , pour $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} (1-36) \quad & \varphi_{\lambda}^t(x) - \varphi_{\lambda}^s(x) \leq (h_r(t) - h_r(s)) (\varphi_{\lambda}^s(x) + K_r) \\ & + \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\| (\varphi_{\lambda}^s(x) + K_r)^{\frac{1}{p}} \int_s^t b_r(\tau) d\tau . \end{aligned}$$

On en déduit alors que $t \longrightarrow \varphi_{\lambda}^t(x)$ est à variation bornée .

On réécrit (1-36) sous la forme , pour $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned} & (\varphi_{\lambda}^t(x) + C_1 \|x\|^2 + C_2) - (\varphi_{\lambda}^s(x) + C_2 \|x\|^2 + C_2) \leq \\ & \leq (h_r(t) - h_r(s)) (\varphi_{\lambda}^s(x) + C_1 \|x\|^2 + C_2) \\ & + \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\| (\varphi_{\lambda}^s(x) + K_r)^{\frac{1}{p}} \int_s^t b_r(\tau) d\tau . \end{aligned}$$

On pose : $\rho(t) = \varphi_{\lambda}^t(x) + C_1 \|x\|^2 + C_2$

d'où :

$$\rho(t) \leq \rho(s) + (h_r(t) - h_r(s)) \rho(s) + \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\| (\varphi_{\lambda}^s(x) + K_r)^{\frac{1}{p}}.$$

On multiplie l'inégalité $\rho(t) \leq \rho(s) + (h_r(t) - h_r(s)) \rho(s)$ par $e^{-h_r(t)}$;

d'où :

$$\begin{aligned} \rho(t) e^{-h_r(t)} - \rho(s) e^{-h_r(s)} + \\ + \rho(s) \left[e^{-h_r(s)} - e^{-h_r(t)} - (h_r(t) - h_r(s)) e^{-h_r(t)} \right] \leq 0. \end{aligned}$$

Comme $e^{-h_r(s)} - e^{-h_r(t)} - (h_r(t) - h_r(s)) e^{-h_r(t)} \geq 0$

on a alors :

$$\rho(t) e^{-h_r(t)} \leq \rho(s) e^{-h_r(s)}$$

d'où :

$$\rho(t) e^{-h_r(t)} - \rho(s) e^{-h_r(s)} \leq \left(\int_s^t b_r(\tau) d\tau \right) \|\partial \varphi_{\lambda}^s(x)\| (\varphi_{\lambda}^s(x) + K_r)^{\frac{1}{p}}.$$

On en déduit que $t \longrightarrow e^{-h_r(t)} (\varphi_{\lambda}^t(x) + C_1 \|x\|^2 + C_2)$ est à variation bornée et vérifie donc :

$$\begin{aligned} (1-37) \quad d \left(e^{-h_r(t)} [\varphi_{\lambda}^t(x) + C_1 \|x\|^2 + C_2] \right) \leq \\ \leq b_r(t) \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\| (\varphi_{\lambda}^t(x) + K_r)^{\frac{1}{p}} dt. \end{aligned}$$

Comme on peut toujours supposer, sans perte de généralité, que

$\varphi_{\lambda}^t(0) = 0$, on a : $\varphi_{\lambda}^t(x) \leq \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\| \|x\|$

d'où :

$$\begin{aligned} \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\| (\varphi_{\lambda}^t(x) + K_r)^{\frac{1}{p}} \leq C \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\|^{\frac{1}{p}+1} \left(\|x\|^{1-\frac{1}{p}} + 1 \right) + C' \\ C \text{ et } C' \text{ constantes positives.} \end{aligned}$$

On obtient finalement à partir de (1-37) :

$$\begin{aligned} d \left(e^{-h_r(t)} \left[\varphi_{\lambda}^t(x) + C_1 \|x\|^2 + C_2 \right] \right) &\leq \\ &\leq \left[C b_r(t) \|\partial \varphi_{\lambda}^t(x)\|^{1+\theta} (\|x\|^{1-\theta} + 1) + C' b_r(t) \right] dt \\ &\text{où } \theta = \frac{1}{p} . \end{aligned}$$

Ce qui achève la vérification des hypothèses du théorème 1.2 , et par conséquent , la démonstration du théorème 1.3 .

CHAPITRE II

APPLICATIONS A DES PROBLEMES PARABOLIQUES DANS DES DOMAINES NON CYLINDRIQUES

Dans ce chapitre on étudie des problèmes de type :

$$(2-1) \quad \begin{cases} u_t = \operatorname{div} \partial J(\operatorname{grad} u) + f & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega(0) \end{cases}$$

où Q est un ouvert non cylindrique, de frontière latérale Σ .

On prendra Q et Σ de la forme :

$$Q = \bigcup_{0 < t < T} \Omega(t) \times \{t\}$$

$$\Sigma = \bigcup_{0 < t < T} \Gamma(t) \times \{t\}$$

$\Omega(t)$ étant à l'instant $t \in [0, T[$ un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de bord $\Gamma(t)$,
 $J : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, +\infty[$ fonction convexe, dérivable et coercive,
 avec $J(0) = 0$.

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ suffisamment grand de sorte qu'il contienne

$$\overline{\bigcup_{0 < t < T} \Omega(t)}$$

Pour l'application du théorème 1.2 aux problèmes de type (2-1), on se placera dans $H = L^2(\Omega)$ sur lequel on définira une famille de fonctions convexes s.c.i. dépendant de t . On formulera alors le problème (2-1) sous la forme (1-1).

Etant donné u définie sur Q à valeur dans $\mathbb{R}$, on note par $\tilde{u}$ son extension par 0 sur $\Omega \times]0, T[\setminus Q$, et on suppose que Σ est suffisamment régulière de telle sorte que :

$$u \in W^{1,1}(Q) \quad \text{et} \quad \text{p.p. } t \quad u(., t) \in W_0^{1,1}(\Omega(t))$$

si et seulement si :

$$\tilde{u} \in W^{1,1}(\Omega \times]0, T[)$$

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{p.p. } \Omega \times]0, T[\setminus Q$$

et donc que l'on pourra identifier u et $\tilde{u}$.

Une solution forte de (2-1) sera donc une fonction $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ absolument continue sur tout compact de $]0, T[$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \text{p.p. } t \in]0, T[\quad u(., t) &\in W^{1,1}(\Omega) \\ u(., t) &= 0 \quad \text{p.p. } \Omega \setminus \Omega(t) \end{aligned}$$

avec :

$$\partial J(\text{grad } u(., t)) \in (L^1(\Omega))^N$$

et :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(., t) = \text{div } \partial J(\text{grad } u(., t)) + f(t, .)$$

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega(t))$$

où $f \in L^2(Q)$.

On pose :

$$\varphi^t(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} J(\text{grad } u) dx & \text{si } u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \\ & u = 0 \quad \text{p.p. } \Omega \setminus \Omega(t) \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

φ^t est convexe s.c.i. propre sur $L^2(\Omega)$.

D'après H. Attouch - A. Damlamian [5] :

$$g \in \partial \varphi^t(u) \xLeftrightarrow{\text{définition}} \begin{cases} u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega), \quad u = 0 \quad \text{p.p. } \Omega \setminus \Omega(t) \\ \int_{\Omega(t)} J(\text{grad } v) \geq \int_{\Omega(t)} J(\text{grad } u) + \int_{\Omega(t)} g(v-u) \\ \forall v \in W^{1,1}(\Omega), \quad v = 0 \quad \text{p.p. } \Omega \setminus \Omega(t) \end{cases}$$

et on a aussi :

$$g \in \partial \varphi^t(u) \xLeftrightarrow{\text{caractérisation}} \begin{cases} u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega), u = 0 \text{ p.p. } \Omega \setminus \Omega(t) \\ \partial J(\text{grad } u) \in (L^1(\Omega))^N \\ -\text{div } \partial J(\text{grad } u) = g \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega(t)) \\ \int_{\Omega(t)} u g = \int_{\Omega(t)} \partial J(\text{grad } u) \text{ grad } u \end{cases} \quad (*)$$

Le problème (2-1) se formule alors en utilisant les sous - différen - tiels :

$$(2-2) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + \partial \varphi^t(u(t)) \ni f(t) & 0 < t < T \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

L'existence de u solution de (2-2) s'obtient par application du théo - rème abstrait 1.2 du chapitre I , une fois ses hypothèses vérifiées . La restriction de u à Q sera alors solution de (2-1) . Les hypothèses du théorème 1.2 portent sur φ_λ^t et $\frac{d\varphi_\lambda^t}{dt}$. On va d'abord expliciter cette dernière de manière formelle dans le but de présenter la démarche suivie . On justifiera ensuite les calculs dans le cas de dimension 1 et on montrera un résultat d'existence sous des hypothèses précises de régularité . Enfin , le calcul de $\frac{d\varphi_\lambda^t}{dt}$ dans le cas où $\text{div } \partial J(\text{grad } u) = \Delta u$ fait apparaître la formule d'Hadamard . Formule qui permettra sous des hypothèses de régularité des $\Gamma(t)$ de justifier le calcul de $\frac{d\varphi_\lambda^t}{dt}$ ainsi que les hypothèses du théorème 1.2 .

(*) Si J est paire ou en dimension $N = 1$, cette formule d'intégra - tion par partie est automatiquement vérifiée .

II.1.- CALCUL FORMEL DE $\frac{d}{dt} \varphi_{\lambda}^t$.

Pour $\lambda > 0$, $u \in L^2(\Omega)$ on a :

$$\varphi_{\lambda}^t(u) = \varphi^t(u_{\lambda}^t) + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} (u - u_{\lambda}^t)^2 dx \quad \text{où} \quad u_{\lambda}^t = J_{\lambda}^t u ,$$

c'est-à-dire dans le cas présent :

$$u_{\lambda}^t \in W^{1,1}(\Omega) , \quad \partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t) \in (L^1(\Omega(t)))^N \quad \text{et} :$$

$$(2-3) \quad \begin{cases} u_{\lambda}^t - \lambda \operatorname{div} \partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t) = u & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega(t)) \\ u_{\lambda}^t = 0 & \Omega \setminus \Omega(t) \end{cases}$$

$$\varphi_{\lambda}^t(u) = \int_{\Omega} J(\text{grad } u_{\lambda}^t) dx + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} (u - u_{\lambda}^t)^2 dx .$$

On dérive de manière formelle :

$$\frac{d}{dt} \varphi_{\lambda}^t(u) = \int_{\Omega} \partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t) \cdot \frac{d}{dt} \text{grad } u_{\lambda}^t dx + \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} (u_{\lambda}^t - u) \frac{du_{\lambda}^t}{dt} dx .$$

Ce qui s'écrit en tenant compte de (2-3) :

$$(2-4) \quad \frac{d}{dt} \varphi_{\lambda}^t(u) = \int_{\Omega(t)} \left(\partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t) \frac{d}{dt} \text{grad } u_{\lambda}^t + \operatorname{div} \partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t) \frac{du_{\lambda}^t}{dt} \right) dx$$

Comme :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[\partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t) \frac{du_{\lambda}^t}{dt} \right] &= \partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t) \frac{d}{dt} \text{grad } u_{\lambda}^t + \\ &\quad + \operatorname{div} \partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t) \frac{du_{\lambda}^t}{dt} \end{aligned}$$

(2-4) devient alors en utilisant la formule d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned} (2-5) \quad \frac{d}{dt} \varphi_{\lambda}^t(u) &= \int_{\Omega(t)} \operatorname{div} \left[\partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t) \frac{du_{\lambda}^t}{dt} \right] dx \\ &= \int_{\Gamma(t)} \partial J(\text{grad } u_{\lambda}^t)(z) \cdot n(t, z) \frac{du_{\lambda}^t}{dt}(z) d\gamma(z) \end{aligned}$$

où $n(t, z)$ est la normale extérieure en $z \in \Gamma(t)$.

Pour évaluer $\frac{du_\lambda^t}{dt}$ sur $\Gamma(t)$, on suppose que $t \rightarrow \Omega(t)$ est croissante et que $\Gamma(t)$ varie de sorte que pour h petit on puisse avoir :

$$\Gamma(t+h) = \{y \in \mathbb{R}^N \mid y = z + h \rho(z, t) n(t, z) + o(h); z \in \Gamma(t)\}$$

où ρ fonction régulière de (z, t) à valeur dans $\mathbb{R}$.

Par le théorème des accroissements finis on a :

$$u_\lambda^{t+h}(y) = u_\lambda^{t+h}(z) + \text{grad } u_\lambda^{t+h}(\xi) \cdot n(t, z) \rho(z, t) h + o(h)$$

avec $\xi \in [z, y]$.

$$\text{Comme } u_\lambda^{t+h}(z) - u_\lambda^t(z) = u_\lambda^{t+h}(z); (u_\lambda^t(z) = 0) \text{ et } u_\lambda^{t+h}(y) = 0$$

on a alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_\lambda^{t+h}(z) - u_\lambda^t(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_\lambda^{t+h}(z)}{h} = - \text{grad } u_\lambda^t(z) \cdot n(t, z) \rho(z, t).$$

D'où en remplaçant dans (2-5) :

$$(2-6) \quad \frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(u) = - \int_{\Gamma(t)} \partial J(\text{grad } u_\lambda^t) \cdot n(z, t) \text{grad } u_\lambda^t \cdot n(t, z) \rho(z, t) d\gamma(z)$$

Sous réserve de justifier correctement les calculs précédents, si on montre que :

$$t \rightarrow \varphi_\lambda^t(u)$$

est à variation bornée, et s'il existe $-1 < \theta < +1$, $b \in L^{\frac{2}{1-\theta}}(0, T)$ tels que l'on puisse avoir :

$$(2-7) \quad \begin{aligned} & \| [\partial J(\text{grad } u_\lambda^t) \cdot n(t, \cdot) \text{grad } u_\lambda^t \cdot n(t, \cdot) \rho(\cdot, t)]^- \|_{L^1(\Gamma(t))} \leq \\ & \leq b(t) \| \text{div } \partial J(\text{grad } u_\lambda^t) \|_{L^2(\Omega(t))}^{1+\theta} \left(\| u_\lambda^t \|_{L^2(\Omega(t))}^{1-\theta} + 1 \right) \end{aligned}$$

on aura alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi_\lambda^t(u) & \leq b(t) \| \partial \varphi_\lambda^t(u) \|_{L^2(\Omega(t))}^{1+\theta} \left(\| u_\lambda^t \|_{L^2(\Omega(t))}^{1-\theta} + 1 \right) \\ & \leq b(t) \| \partial \varphi_\lambda^t(u) \|_{L^2(\Omega)}^{1+\theta} \left(\| u \|_{L^2(\Omega)}^{1-\theta} + 1 \right). \end{aligned}$$

On se ramènera donc à appliquer le théorème 1.2 à (2-2).

II.2.- PROBLEME (2-1) EN DIMENSION 1 .

Dans cette section, on va établir un résultat d'existence de solution de (2-1) dans le cas particulier de $N = 1$.

On reprend (2-1) sous la forme :

$$(2-8) \quad \begin{cases} u_t = (\beta(u_x))_x + f & \text{dans } Q \\ u(0, t) = u(S(t), t) = 0 & t \in]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans }]0, S(0)[\end{cases}$$

où :

- $Q = \{(x, t) ; 0 < t < T \quad 0 < x < S(t-)\}$
- $S : [0, T[\longrightarrow]0, +\infty[$ vérifiant :

H1) a) S partout définie sur $[0, T[$ et continue à droite

b) Il existe $0 < \theta \leq 1$, $b \in L^{\frac{4}{2-\theta}}(]0, T[)$ tels que :

$$S(t) - S(t+h) \leq \int_t^{t+h} b(\tau) d\tau$$

pour $0 < t < T-h$

- $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

H2) a) β est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$,
de primitive J ;

b) La fonction $\psi(r) = r \beta^{-1}(r)$ est localement lipschitzienne et satisfait :

$$\psi'(r) \leq C \left(1 + \psi(r)^{\frac{\theta}{2}} \right) \quad \text{p.p.} \quad C = \text{Cste} \geq 0 .$$

Remarque 2.1 :

Sous l'hypothèse H1) sur S , Q est un ouvert .

Preuve :

On note d'abord que S est à saut positif . En effet ,
soit t_n une suite décroissante vers t dans $]0, T[$.

D'après $H1)$:

$$S(t_n) \leq S(t) + \int_{t_n}^t b(\tau) d\tau$$

d'où : $S(t-) \leq S(t)$.

Soit $(x, t) \in \overline{\mathbb{R}^+ \times [0, T] \setminus Q}$ et soit (x_n, t_n) :

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \quad t_n \rightarrow t \quad x_n \geq S(t_n-) .$$

$$S(t_n) \geq S(t) - \int_t^{t_n} b(\tau) d\tau .$$

Si $t_n \geq t$ alors $x \geq S(t) \geq S(t-)$.

Si $t_n < t$ $S(t_n-) \longrightarrow S(t-)$ et donc $x \geq S(t-)$
 $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times [0, T] \setminus Q$.

Remarque 2.2 :

Q admet comme frontière :

$$\partial Q = \{0\} \times]0, T[\cup \{(x, t) ; t \in]0, T[\mid S(t-) \leq x \leq S(t)\} \cup [0, S(0)] \times \{0\}$$

On énonce le théorème :

Théorème 2.1 :

On suppose que S et β vérifient respectivement les hypothèses $H1)$ et $H2)$. Alors :

(i) Pour tout $f \in L^1(Q)$ avec $\sqrt{t} f \in L^2(Q)$ et $u_0 \in L^2(0, S(0))$ il existe u unique vérifiant :

$$u \in C(\overline{Q} \cap [0, +\infty[\times]0, T[)$$

$$u_x \in L^1_{loc}(Q) , \quad \beta(u_x) \in L^1_{loc}(Q)$$

$$\sqrt{t} u_t \in L^2(Q) , \quad \sqrt{t} \beta(u_x)_x \in L^2(Q)$$

$$u_t = \beta(u_x)_x + f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } (\bar{Q} \setminus Q) \cap [0, +\infty[\times]0, T[$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{S(0) \wedge S(t)} |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx = 0 .$$

(ii) Si de plus , $u_0 \in W_0^{1,1}(0, S(0))$ et $\int J(u_{0x}) < \infty$, $f \in L^2(Q)$, alors :

$$u_t \in L^2(Q) \quad \text{et} \quad \beta(u_x)_x \in L^2(Q) .$$

Remarque 2.3 :

Dans le cas où S est régulière , on peut étudier le problème (2-8) en se ramenant par un changement de variable à un domaine fixe . On pose par exemple :

$$y = \frac{x}{S(t)} \quad y \in]0, 1[$$

$$u(x, t) = u(S(t)y, t) = v(y, t)$$

$$u_x(x, t) = \frac{1}{S(t)} v_y(y, t) ,$$

$$\beta(u_x)_x = \frac{1}{S(t)} \beta\left(\frac{1}{S(t)} v_y\right)_y$$

$$u_t(x, t) = v_t(y, t) - v_y\left(\frac{1}{S(t)} v_y\right) \frac{S'(t)}{S(t)^2} .$$

Le problème (2-8) devient alors :

$$\begin{cases} v_t = \frac{1}{S(t)} \beta\left(\frac{1}{S(t)} v_y\right)_y + v_y\left(\frac{1}{S(t)} v_y\right) \frac{S'(t)}{S(t)^2} + f \\ \hspace{15em} \text{dans }]0, 1[\times]0, T[\\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ v(y, 0) = v_0(y) \quad \text{dans }]0, 1[\end{cases}$$

La régularité requise dans H1) pour S ne permet pas d'étudier directement ce problème . $\square$

Pour $u \in L^2(]0, +\infty[)$ on pose :

$$\varphi^t(u) = \begin{cases} +\infty & \text{si } u \notin W^{1,1}(\mathbb{R}^+) \\ \int_0^{+\infty} J(u_x) dx & \text{si } u(0) = 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \text{ sur } [S(t), +\infty[\\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 2.1 [5] :

φ^t est convexe s.c.i. propre sur $L^2(\mathbb{R}^+)$:

$$v \in \partial \varphi^t(u) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^+) , \quad u(0) = 0 \\ \quad \quad \quad u = 0 \text{ sur } [S(t), +\infty[\\ \beta(u_x) \in W^{1,2}(0, S(t)) \\ -\beta(u_x)_x = v \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, S(t)[) \end{cases}$$

On prolonge f et u_0 par 0 sur $\mathbb{R}^+ \times]0, T[\setminus Q$.

On montre alors la :

Proposition 2.1 :

Sous les hypothèses $H1)$ et $H2)$, pour $f \in L^1(Q)$ avec $\sqrt{t} f \in L^2(Q)$ et $u_0 \in L^2(0, S(0))$, il existe u unique vérifiant :

$$u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^+)) \cap W_{loc}^{1,1}(]0, T[; L^2(\mathbb{R}^+))$$

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial \varphi^t(u(t)) \ni f(t) \quad \text{p.p. } t$$

$$u(t)_x \in W_0^{1,1}(]0, +\infty[)$$

$$u(t) = 0 \text{ sur } [S(t), +\infty[$$

$$\frac{du}{dt}(t) = \beta(u(t)_x)_x + f(t) \quad \mathcal{D}'(]0, S(t)[)$$

$$\sqrt{t} u_t \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^+))$$

$$\sqrt{t} \beta(u_x)_x \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^+))$$

On montrera plus loin que les conclusions du théorème 2.1 s'obtiennent à partir de la proposition ci-dessus en prenant la restriction de u à Q .

Démonstration de la proposition 2.1 :

On va montrer que la famille φ^t satisfait aux conditions du théorème abstrait 1.2 du chapitre I .

Pour $\lambda > 0$, $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$ on a :

$$\varphi_{\lambda}^t(u) = \int_0^{\infty} J(u_{\lambda}^t, x) + \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\infty} (u - u_{\lambda}^t)^2$$

où $u_{\lambda}^t = (1 + \lambda \partial \varphi^t)^{-1} u$ et vérifie :

$$(2-9) \quad \begin{cases} u_{\lambda}^t \in W^{1,1}(\mathbb{R}^+) , \beta(u_{\lambda}^t, x) \in W^{1,2}(0, S(t)) \\ u_{\lambda}^t = \lambda \beta(u_{\lambda}^t, x) + u \quad \text{p.p. sur } [0, S(t)[\\ u_{\lambda}^t(0) = 0 , \quad u_{\lambda}^t = 0 \quad \text{sur } [S(t), +\infty[\end{cases}$$

On montre la :

Proposition 2.2 :

Sous les hypothèses de la proposition 2.1 :

(i) Il existe C constante positive telle que :

$$(2-10) \quad \varphi_{\lambda}^{t+h}(u) - \varphi_{\lambda}^t(u) \leq C(S(t+h) - S(t))^+ \\ \text{pour } 0 < t < T-h .$$

Donc $t \longrightarrow \varphi_{\lambda}^t(u)$ est à variation bornée et à variation positive absolument continue .

(ii) On a l'inégalité :

$$(2-11) \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{\varphi_{\lambda}^{t+h}(u) - \varphi_{\lambda}^t(u)}{h} \leq b(t) \beta(u_{\lambda}^t, x(S(t))) u_{\lambda}^t, x(S(t)) .$$

La démonstration découle des trois lemmes suivants :

Lemme 2.2 :

(i) Il existe $x_0 \in [0, S(t)[$ tel que :

$$\beta(u_{\lambda}^t, x) = \int_{x_0}^x \beta(u_{\lambda}^t, x)_{x_0} .$$

$$(ii) \quad |\beta(u_{\lambda, x}^t)| \leq 2 \frac{S(t)^{\frac{1}{2}}}{\lambda} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

(donc $\beta(u_{\lambda, x}^t)$ uniformément bornée)

$$(iii) \quad \|u_{\lambda, x}^t\|_{\mathcal{C}([0, S(t)[})} \leq C \text{ uniformément en } t, \\ C = \text{constante} \geq 0.$$

Preuve :

Comme $\beta(u_{\lambda, x}^t) \in W^{1,2}(0, S(t))$, $x \longrightarrow \beta(u_{\lambda, x}^t(x))$ est bien définie et continue sur $[0, S(t)[$.

On en déduit que $x \longrightarrow u_{\lambda, x}^t(x)$ est continue sur $[0, S(t)[$. En effet, soit $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ dans $[0, S(t)[$, $\beta(u_{\lambda, x}^t(x_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \beta(u_{\lambda, x}^t(x))$; comme β est strictement croissante, $u_{\lambda, x}^t(x_n)$ est bornée sur $[0, S(t)[$. Donc $u_{\lambda, x}^t(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$ dans $[0, S(t)[$ et $\beta(u_{\lambda, x}^t(x)) = y$ d'où $y = u_{\lambda, x}^t(x)$

(car β strictement croissante) .

Puisque $u_{\lambda}^t(0) = u_{\lambda}^t(S(t)) = 0$ et $u_{\lambda, x}^t$ continue, il existe $x_0 \in [0, S(t)[$ tel que $u_{\lambda, x}^t(x_0) = 0$, et donc $\beta(u_{\lambda, x}^t(x_0)) = 0$.

On a alors :

$$\beta(u_{\lambda, x}^t(x)) = \int_{x_0}^x \beta(u_{\lambda, x}^t)_x$$

d'où :

$$|\beta(u_{\lambda, x}^t(x))| \leq |x - x_0|^{\frac{1}{2}} \|\beta(u_{\lambda, x}^t)_x\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

D'autre part :

$$\|u_{\lambda}^t\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

et :

$$\|\beta(u_{\lambda, x}^t)_x\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{1}{\lambda} \left(\|u_{\lambda}^t\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \right) \\ \leq \frac{2}{\lambda} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}$$

β étant strictement croissante, on en déduit (iii). $\square$

Lemme 2.3 :

Soient x_n, t_n, x et t tels que :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x, \quad x_n \leq S(t_n); \quad t_n \searrow t \text{ et } x \leq S(t).$$

$$\text{Alors } u_{\lambda, x}^{t_n}(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u_{\lambda, x}^t(x).$$

Preuve :

On procède par un changement de variable en se ramenant à un intervalle fixe . On pose donc :

$$y = \frac{x}{S(t)} \quad y \in [0, 1]$$

$$v_{\lambda}^t(y) = u_{\lambda}^t(S(t)y)$$

$$v^t(y) = u(S(t)y)$$

v_{λ}^t vérifie :

$$\begin{cases} v_{\lambda}^t(y) - \frac{\lambda}{S(t)} \beta\left(\frac{1}{S(t)} v_{\lambda, y}^t\right)_y = v^t & \text{ sur }]0, 1[\\ v_{\lambda}^t(0) = v_{\lambda}^t(1) = 0 \end{cases}$$

D'après le lemme 2.2 et en tenant compte de :

$$\|v^t\|_{L^2(0, 1)} \leq S(t)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \quad \text{on a :}$$

$$\left\| \beta\left(\frac{v_{\lambda, y}^t}{S(t)}\right)_y \right\|_{L^2(0, 1)} \leq \frac{2 S(t)^{\frac{1}{2}}}{\lambda} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \text{Cste}.$$

$\beta\left(\frac{v_{\lambda, y}^t}{S(t)}\right)$ est höldérienne uniformément en t de rapport $\frac{1}{2}$ et uniformément bornée . Comme β est une bijection croissante , $v_{\lambda, x}^t$ est uniformément bornée . Donc :

$$v_{\lambda}^{t_n} \xrightarrow[t_n]{} w \quad \text{uniformément sur } [0, 1] \text{ dans } C^1$$

$$\beta\left(\frac{v_{\lambda, y}^{t_n}}{S(t_n)}\right) \longrightarrow h \text{ uniformément sur } [0, 1].$$

Puisque β est strictement croissante :

$$v_{\lambda, y}^{t_n} \longrightarrow S(t) \beta^{-1}(h)$$

d'où :

$$h = \beta\left(\frac{w}{S(t)}\right) .$$

w vérifie :

$$\begin{cases} w - \frac{\lambda}{S(t)} \beta\left(\frac{w}{S(t)}\right)_y = v^t & \mathcal{D}^t(0, 1) \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

L'unicité entraîne alors :

$$w = v_{\lambda}^t$$

et donc :

$$v_{\lambda, y}^t(y_n) \longrightarrow v_{\lambda, y}^t(y) .$$

D'où en revenant à la variable x :

$$\begin{array}{ccc} u_{\lambda, x}^t(x_n) & \xrightarrow{\quad} & u_{\lambda, x}^t(x) \\ \begin{array}{c} t_n \searrow t \\ x_n \rightarrow x \end{array} & & \end{array}$$

ce qui achève la preuve du lemme 2.3 . $\square$

Lemme 2.4 :

Soient $\sigma, \tau \in]0, T[$ avec $S(\tau) < S(\sigma)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}^{\tau}(u) - \varphi_{\lambda}^{\sigma}(u) &\geq 0 \\ \varphi_{\lambda}^{\tau}(u) - \varphi_{\lambda}^{\sigma}(u) &\leq -\beta(u_{\lambda, x}^{\tau}(S(\tau))) (\delta S(\sigma) + (1-\delta)S(\tau)) (S(\tau) - S(\sigma)) \\ &\quad + C \left(S(\sigma) - S(\tau) \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

où C est une constante positive indépendante de σ et τ , $\delta \in [0, 1]$.

Preuve :

Soient $\sigma, \tau \in]0, T[$ avec $S(\tau) < S(\sigma)$.

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}^{\tau}(u) - \varphi_{\lambda}^{\sigma}(u) &= \\ &= \int_0^{S(\tau)} J(u_{\lambda}^{\tau}, x) - \int_0^{S(\sigma)} J(u_{\lambda}^{\sigma}, x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) \left(\frac{u_{\lambda}^{\tau} + u_{\lambda}^{\sigma}}{2} - u \right) \\ &= \int_{S(\sigma)}^{S(\tau)} J(u_{\lambda}^{\tau}, x) + \int_0^{S(\sigma)} J(u_{\lambda}^{\tau}, x) - J(u_{\lambda}^{\sigma}, x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) \left(\frac{u_{\lambda}^{\tau} + u_{\lambda}^{\sigma}}{2} - u \right) \\ &\leq \int_0^{S(\tau)} \beta(u_{\lambda}^{\tau}, x) (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma})_x + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) \left(\frac{u_{\lambda}^{\tau} + u_{\lambda}^{\sigma}}{2} - u \right). \end{aligned}$$

On intègre par partie le 1^{er} terme du second membre :

$$\begin{aligned} \int_0^{S(\tau)} \beta(u_{\lambda}^{\tau}, x) (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma})_x &= \\ &= \left[\beta(u_{\lambda}^{\tau}, x) (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) \right]_0^{S(\tau)} - \int_0^{S(\tau)} \beta(u_{\lambda}^{\tau}, x)_x (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) . \end{aligned}$$

On a alors, puisque $u_{\lambda}^{\tau} - \lambda \beta(u_{\lambda}^{\tau}, x)_x = u \quad \mathcal{D}'(0, S(\tau))$:

$$\int_0^{S(\tau)} \beta(u_{\lambda}^{\tau}, x)_x (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{S(\tau)} (u^{\tau} - u) (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) .$$

D'où :

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}^{\tau}(u) - \varphi_{\lambda}^{\sigma}(u) &\leq -\beta(u_{\lambda}^{\tau}, x(S(\tau))) u_{\lambda}^{\sigma}(S(\tau)) + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} (u^{\tau} - u^{\sigma}) \left(\frac{u^{\tau} + u^{\sigma}}{2} - u \right) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \int_{S(\tau)}^{S(\sigma)} (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) (u^{\tau} - u) \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}^{\tau}(u) - \varphi_{\lambda}^{\sigma}(u) &\leq \\ &\leq -\beta(u_{\lambda}^{\tau}, x(S(\tau))) u_{\lambda}^{\sigma}(S(\tau)) - \frac{1}{2\lambda} \int_0^{S(\tau)} (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma})^2 + \frac{1}{\lambda} \int_{S(\tau)}^{S(\sigma)} (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) \left(\frac{u_{\lambda}^{\tau} + u_{\lambda}^{\sigma}}{2} - u \right) \\ &\leq -\beta(u_{\lambda}^{\tau}, x(S(\tau))) u_{\lambda}^{\sigma}(S(\tau)) - \frac{1}{2\lambda} \int_{S(\tau)}^{S(\sigma)} u_{\lambda}^{\sigma 2} + \frac{1}{\lambda} \int_{S(\tau)}^{S(\sigma)} u_{\lambda}^{\sigma} u \end{aligned}$$

soit finalement :

$$(2-12) \quad \varphi_{\lambda}^{\tau}(u) - \varphi_{\lambda}^{\sigma}(u) \leq -\beta(u_{\lambda, x}^{\tau}(S(\tau))) u_{\lambda}^{\sigma}(S(\tau)) + \frac{1}{\lambda} \int_{S(\tau)}^{S(\sigma)} u_{\lambda}^{\sigma} u$$

Avec une démarche analogue , on a aussi :

$$\varphi_{\lambda}^{\tau}(u) - \varphi_{\lambda}^{\sigma}(u) \geq \int_0^{S(\sigma)} \beta(u_{\lambda, x}^{\sigma}) (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma})_x + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) \left(\frac{u_{\lambda}^{\tau} + u_{\lambda}^{\sigma}}{2} - u \right).$$

Or :

$$\int_0^{S(\sigma)} \beta(u_{\lambda, x}^{\sigma}) (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma})_x = \left[\beta(u_{\lambda, x}^{\sigma}) (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) \right]_0^{S(\sigma)} - \frac{1}{\lambda} \int_0^{S(\sigma)} (u_{\lambda}^{\sigma} - u) (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}).$$

D'où :

$$\varphi_{\lambda}^{\tau}(u) - \varphi_{\lambda}^{\sigma}(u) \geq \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma}) \left(\frac{u_{\lambda}^{\tau} + u_{\lambda}^{\sigma}}{2} - u \right) - \frac{1}{\lambda} \int_0^{S(\sigma)} (u_{\lambda}^{\sigma} - u) (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma})$$

soit encore :

$$\varphi_{\lambda}^{\tau}(u) - \varphi_{\lambda}^{\sigma}(u) \geq \frac{1}{2\lambda} \int_0^{S(\sigma)} (u_{\lambda}^{\tau} - u_{\lambda}^{\sigma})^2 \geq 0 .$$

Grâce à la formule des accroissements finis on écrit :

$$u_{\lambda}^{\sigma}(S(\tau)) = (S(\tau) - S(\sigma)) u_{\lambda, x}^{\sigma} (\delta S(\sigma) + (1-\delta) S(\tau))$$

$$u_{\lambda}^{\sigma}(x) = (x - S(\sigma)) u_{\lambda, x}^{\sigma} (\delta S(\sigma) + (1-\delta) x)$$

où $\delta \in [0, 1]$.

(2-12) devient alors :

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda}^{\tau}(u) - \varphi_{\lambda}^{\sigma}(u) &\leq -\beta(u_{\lambda, x}^{\tau}(S(\tau))) u_{\lambda, x}^{\sigma} (\delta S(\sigma) + (1-\delta) S(\tau)) (S(\tau) - S(\sigma)) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \int_{S(\tau)}^{S(\sigma)} u(x) (x - S(\sigma)) u_{\lambda, x}^{\sigma} (\delta S(\sigma) + (1-\delta) x) dx \end{aligned}$$

On majore le deuxième terme du second membre comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{S(\tau)}^{S(\sigma)} u(x) (x - S(\sigma)) u_{\lambda, x}^{\sigma} (\delta S(\sigma) + (1-\delta)x) dx \leq \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|u_{\lambda, x}^{\sigma}\|_{L^{\infty}(S(\tau), S(\sigma))} \|u\|_{L^2(S(\tau), S(\sigma))} (S(\sigma) - S(\tau))^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Utilisant alors le lemme 2.2 (iii) on obtient le résultat du lemme. $\square$

Démonstration de la proposition 2.2 :

L'inégalité (2-10) résulte du lemme 2.4 car

$\beta(u_{\lambda, x}^{\tau}(S(\tau)))$ et $u_{\lambda, x}^{\sigma}(\delta S(\sigma) + (1-\delta)S(\tau))$ sont bornées uniformément en τ . En effet, on prend $\tau = t$, $\sigma = t+h$ avec $t+h < T$:

- Si $S(t) \leq S(t+h)$, d'après le lemme 2.4 :

$$\varphi_{\lambda}^{t+h}(u) - \varphi_{\lambda}^t(u) \leq 0.$$

- Si $S(t+h) < S(t)$, alors :

$$\varphi_{\lambda}^{t+h}(u) - \varphi_{\lambda}^t(u) \leq C(S(t+h) - S(t)).$$

On a alors dans les deux cas :

$$\varphi_{\lambda}^{t+h}(u) - \varphi_{\lambda}^t(u) \leq C(S(t+h) - S(t))^+$$

donc $t \rightarrow \varphi_{\lambda}^t(u)$ est à variation bornée et à variation positive absolument continue ; ce qui établit (i).

Utilisant le lemme 2.3, on obtient par passage à la limite dans l'inégalité du lemme 2.4 :

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{\varphi_{\lambda}^{t+h}(u) - \varphi_{\lambda}^t(u)}{h} & \leq \beta(u_{\lambda, x}^t(S(t))) u_{\lambda, x}^t(S(t)) \left(\frac{dS}{dt} \right)^-(t) \\ & \leq \beta(u_{\lambda, x}^t(S(t))) u_{\lambda, x}^t(S(t)) b(t) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 2.2. $\square$

De la proposition 2.2, on montre l'inégalité au sens des mesures :

Lemme 2.5 :

$$d\varphi_{\lambda}^t(u) \leq C b(t) \|\beta(u_{\lambda, x}^t)\|_{L^2(0, S(t))}^{1+\frac{\theta}{2}} \left(\|u_{\lambda}^t\|_{L^2(0, S(t))}^{1-\frac{\theta}{2}} + 1 \right) dt$$

où C est une constante positive indépendante de t .

Preuve :

On pose $w = \beta(u_{\lambda, x}^t)$.

On a :

$$u_{\lambda, x}^t = \beta^{-1}(w) \text{ et } \int_0^{S(t)} \beta^{-1}(w) = 0.$$

Il existe $x_0 \in [0, S(t)[$ tel que $u_{\lambda, x}^t(x_0) = 0$ et donc $w(x_0) = 0$.

On écrit alors :

$$\begin{aligned} (2-13) \quad \psi(w(S(t))) &= \int_{x_0}^{S(t)} \psi(w)_x = \int_{x_0}^{S(t)} \psi'(w) w_x \\ &\leq \|\psi'(w)\|_{L^2(x_0, S(t))} \|w_x\|_{L^2(x_0, S(t))} \\ \|\psi'(w)\|_{L^2(x_0, S(t))}^2 &= \int_{x_0}^{S(t)} \psi'(w)^2 dx \leq S(t)^{1-\theta} \left(\int_0^{S(t)} \psi'(w)^{\frac{2}{\theta}} \right)^{\theta}. \end{aligned}$$

Comme d'après l'hypothèse $H2$) :

$$\psi'(w)^{\frac{2}{\theta}} \leq C(1 + \psi(w)) \quad C = \text{Cste}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} (2-14) \quad \|\psi'(w)\|_{L^2(x_0, S(t))}^2 &\leq C^2 S(t)^{1-\theta} \left(\int_0^{S(t)} (1 + \psi(w)) dx \right)^{\theta} \\ &\leq C^2 S(t)^{1-\theta} \left(S(t) + \int_0^{S(t)} \psi(w) dx \right)^{\theta}. \end{aligned}$$

En intégrant par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^{S(t)} \psi(w) dx &= \int_0^{S(t)} w u_{\lambda, x}^t dx = - \int_0^{S(t)} w_x u_{\lambda}^t dx \\ &\leq \|w_x\|_{L^2(0, S(t))} \|u_{\lambda}^t\|_{L^2(0, S(t))}. \end{aligned}$$

De (2-14) on obtient alors :

$$\|\psi'(w)\|_{L^2(x_0, S(t))}^2 \leq C^2 S(t)^{1-\theta} \left(S(t)^{\theta} + \|w_x\|_{L^2(0, S(t))}^{\theta} + \|u_{\lambda}^t\|_{L^2(0, S(t))}^{\theta} \right).$$

Reportant dans (2-11) on a alors :

$$\begin{aligned}
 (2-15) \quad \psi(w(S(t))) &\leq Cste \|w_x\|_{L^2(0, S(t))}^{\frac{\theta}{2}} \left(1 + \|w_x\|_{L^2(0, S(t))}^{\frac{\theta}{2}} \|u_\lambda^t\|_{L^2(0, S(t))}^{\frac{\theta}{2}} \right) \\
 &\leq Cste \|w_x\|_{L^2(0, S(t))}^{\frac{\theta}{2}} \left(\|u_\lambda^t\|_{L^2(0, S(t))}^{\frac{\theta}{2}} + 1 \right) \\
 &\leq Cste \|w_x\|_{L^2(0, S(t))}^{1 + \frac{\theta}{2}} \left(\|u_\lambda^t\|_{L^2(0, S(t))}^{1 - \frac{\theta}{2}} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

Compte-tenu du fait que $w_x = \beta(u_{\lambda, x}^t)_x$ et de la proposition 2.2 , on obtient finalement :

$$d\varphi_\lambda^t(u) \leq Cb(t) \|\beta(u_{\lambda, x}^t)_x\|_{L^2(0, S(t))}^{1 + \frac{\theta}{2}} \left(\|u_\lambda^t\|_{L^2(0, S(t))}^{1 - \frac{\theta}{2}} + 1 \right) dt$$

au sens des mesures . $\square$

Fin de la démonstration de la proposition 2.1 :

Il résulte du lemme 2.5 que :

$$\begin{aligned}
 d\varphi_\lambda^t(u) &\leq Cb(t) \|\beta(u_{\lambda, x}^t)_x\|_{L^2(0, S(t))}^{1 + \frac{\theta}{2}} \left(\|u_\lambda^t\|_{L^2(0, S(t))}^{1 - \frac{\theta}{2}} + 1 \right) dt \\
 &\leq Cb(t) \|\partial\varphi_\lambda^t(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^{1 + \frac{\theta}{2}} \left(\|u\|_{L^2(0, S(t))}^{1 - \frac{\theta}{2}} + 1 \right) dt
 \end{aligned}$$

au sens des mesures .

Comme on a déjà montré (proposition 2.2) que $t \rightarrow \varphi_\lambda^t(u)$ est à variation bornée , on est donc en position d'appliquer le théorème abstrait 1.2 du chapitre I .

Les conclusions de la proposition 2.1 se déduisent de ce théorème.

Démonstration du théorème 2.1 :

On obtient les conclusions du théorème 2.1 à partir de la proposition 2.1 en considérant la restriction de u à $\mathcal{Q}$.

On montre que cette restriction - que l'on notera simplement u - appartient à $\mathcal{C}(\overline{\mathcal{Q}} \cap [0, +\infty[\times]0, T[)$.

En effet , il suffit d'établir que $u(t)$ est équicontinue en x :

Pour $r_0 > 0$, $r \in \mathbb{R}$, on a :

$$J(r) \geq J(r_0) + (r - r_0) \beta(r_0)$$

d'où :

$$r \leq \frac{J(r)}{\beta(r_0)} - \frac{J(r_0)}{\beta(r_0)} + r_0 \leq \frac{J(r)}{\beta(r_0)} + r_0 .$$

En échangeant r_0 en $-r_0$:

$$J(r) \geq J(-r_0) + (r + r_0) \beta(-r_0)$$

$$r \geq -\frac{J(-r_0)}{\beta(-r_0)} + \frac{J(r)}{\beta(-r_0)} - r_0 \geq -\frac{J(r)}{\beta(-r_0)} - r_0 .$$

D où finalement :

$$|r| \leq r_0 + \frac{J(r)}{\beta(r_0) \wedge (-\beta(-r_0))} .$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$, $t \in]0, T[$. On a alors :

$$\begin{aligned} |u(t)_x - u(t)_y| &\leq \left| \int_x^y u(t)_x(z) dz \right| \\ &\leq r_0 |x-y| + \frac{1}{\beta(r_0) \wedge (-\beta(-r_0))} \int_0^{+\infty} J(u(t)_x(z)) dz \\ &\leq r_0 |x-y| + \frac{C}{\beta(r_0) \wedge (-\beta(-r_0))} \end{aligned}$$

$$\text{où } C = \int_0^{+\infty} J(u(t)_x(z)) dz < \infty .$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on choisit r_0 tel que :

$$\frac{C}{\beta(r_0) \wedge (-\beta(-r_0))} < \frac{\epsilon}{2} .$$

On prend alors $\delta = \frac{\epsilon}{2r_0}$ et on aura pour $|x - y| < \delta$,

$$|u(t)(x) - u(t)(y)| \leq \epsilon .$$

$u(t)$ est équicontinue en x .

Pour achever la démonstration du théorème 2.1 , il reste à montrer l'unicité de la solution .

Soit u solution du problème du théorème 2.1 . On pose :

$$\tilde{u}(t)(x) = \begin{cases} u(x, t) & \text{si } x \in [0, S(t)[\\ 0 & \text{si } x \geq S(t) \end{cases}$$

$\tilde{u} \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}(\mathbb{R}^+))$ et est à support compact .

Donc à fortiori :

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^+)) \\ \tilde{u}(t) &\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} u_0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^+) . \end{aligned}$$

On va montrer que $\tilde{u}(t)$ est solution du problème de la proposition 2.1 .

Il suffit de montrer que :

$$\tilde{u} \in W_{loc}^{1,1}([0, T]; \mathbb{R}^+)$$

et :

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = u_t(\cdot, t) \chi_{[0, S(t)[}$$

ce qui nous ramène à montrer que :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^{S(t)} \frac{d\xi}{dt}(t) \tilde{u}(t) &= \int_0^T dt \int_0^{S(t)} \frac{d\xi}{dt}(t) \tilde{u}(t) = \int_0^T \int_0^{S(t)} \xi u_t(\cdot, t) \\ \forall \xi &\in \mathcal{D}([0, T]; L^2(\mathbb{R}^+)) . \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, montrer l'égalité ci-dessus revient à montrer :

$$\iint_Q \xi_t u = \iint_Q \xi u_t \quad \forall \xi \in \mathcal{D}([0, T] \times \mathbb{R}^+) .$$

On a : $(\xi u)_t = \xi_t u + \xi u_t$ au sens des distributions

$(\xi u)_t \in L^2(Q)$ dans Q .

$$\xi u \in \mathcal{C}(\bar{Q})$$

$$\xi u = 0 \quad \text{sur } \partial Q .$$

En utilisant le :

Lemme 2.6 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ à support compact avec $v = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$. Alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0$$

on obtient alors :

$$\iint_Q \xi_t u + \xi u_t = 0.$$

$\tilde{u}(t)$ est par conséquent localement absolument continue de $]0, T[$ dans $L^2(\mathbb{R}^+)$ et :

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}(t) = \chi_{[0, S(t)[} u_t(\cdot, t) \quad \text{p.p.}$$

$\tilde{u}$ est donc solution du problème de la proposition 2.1.

L'unicité de celle-ci entraîne l'unicité de u . Ce qui achève la démonstration du théorème 2.1. $\square$

Preuve du lemme 2.6 :

Soit $v_\epsilon = \text{sign}_\epsilon v (|v| - \epsilon)^+$ $\epsilon > 0$.

$$v_\epsilon \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \quad \text{supp } v_\epsilon \subset \Omega \quad \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i} = \chi_{\{v, |v| > \epsilon\}} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{p.p.}$$

On a alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i} = \int_{\Omega} \frac{\partial v_\epsilon}{\partial x_i} \xi = - \int_{\Omega} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} v_\epsilon = 0 \quad \xi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

$\xi = 1$ au voisinage de $\{v \text{ tel que } |v| > \epsilon\}$.

Passant à la limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{|u| \neq 0} \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \quad \text{d'où} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0. \quad \square$$

Exemple de fonction β .

On considère la fonction $\beta(r) = |r|^{p-2} r$, $p \geq 2$.

$$\psi(r) = r \beta^{-1}(r) = |r|^{\frac{p}{p-1}}$$

$$\psi'(r) = \frac{p}{p-1} |r|^{\frac{p}{p-1}-1} \text{sign } r = \frac{p}{p-1} \left[r \beta^{-1}(r) \right]^{\frac{1}{p}} \text{sign } r$$

$$= \frac{p}{p-1} \psi(r)^{\frac{1}{p}} \text{sign } r \leq \frac{p}{p-1} \left(1 + \psi(r)^{\frac{1}{p}} \right) .$$

β vérifie donc l'hypothèse $H2)$ avec $\theta = \frac{2}{p}$.

II.3. - CAS DE L'EQUATION DE LA CHALEUR .

Dans cette section on étudie :

$$(2-16) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + f & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(., 0) = u_0 & \text{dans } \Omega(0) \end{cases}$$

où :

$$Q = \bigcup_{0 < t < T} \Omega(t) \times \{t\}$$

$$\Sigma = \bigcup_{0 < t < T} \Gamma(t) \times \{t\} .$$

On montre , moyennant la formule d'Hadamard , que les conditions d'existence de solutions de ce problème particulier de (2-1) sont remplies . Conditions qu'on a énumérées dans la présentation du problème (2-1) . On précise d'abord les hypothèses de régularité des domaines $\Omega(t)$:

(H) On suppose qu'il existe U ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ contenant tous les bords $\Gamma(t)$, $0 \leq t \leq T$, et une fonction :

$$\phi : [0, T[\times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant :

a) Pour tout $t \in [0, T[$, $x \longrightarrow \phi(t, x)$ est de classe C^2 avec :

$$\bullet \quad |\text{grad}_x \phi(t, x)| \leq M^{-1} \quad \forall x \in U$$

$$\bullet \quad |\phi(t, x)| + \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| + \sum_{i,j=1}^N \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq M$$

où M constante positive indépendante de t .

b) Pour tout $x \in U$, $t \longrightarrow \phi(t, x)$ est partout définie sur $[0, T[$, à variation bornée et continue à droite .

c) Il existe $\rho \in L^4(0, T)$ tel que :

$$(2-17) \quad -\frac{\partial \phi}{\partial t} \leq \rho |\text{grad}_x \phi| \quad \text{dans } \mathcal{D}'(U \times]0, T[)$$

d)

$$\Omega(t) \cap U = \{x \in U, \phi(t, x) < 0\}$$

$$\Gamma(t) = \{x \in U, \phi(t, x) = 0\}.$$

Remarque 2.4 :

Sous l'hypothèse (H) , $Q = \bigcup_{0 < t < T} \Omega(t) \times \{t\}$ est

un ouvert .

Preuve :

En effet , soit $(x, t) \in Q \cap \partial Q$, $x \in \Omega(t)$ et donc $\phi(t, x) < 0$. On considère alors (t_n, x_n) une suite telle que , $x_n \in U$, $x_n \notin \Omega(t_n)$ et $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$ et $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} t$.

• On suppose d'abord que :

$$t_n \searrow t .$$

Alors, grâce à la continuité à droite de ϕ en t , on obtient par passage à la limite dans l'inégalité $\phi(t_n, x_n) \geq 0$, que $\phi(t, x) \geq 0$, ce qui est absurde .

• Si $t_n \nearrow t$:

on a alors d'après (H) :

$$\begin{aligned} 0 \leq \phi(t_n, x_n) &\leq \phi(t, x_n) + \int_{t_n}^t \rho(s) |\text{grad} \phi(s, x_n)| ds \\ &\leq M \int_{t_n}^t \rho(s) ds . \end{aligned}$$

D'où encore par passage à la limite :

$$\phi(t, x) \geq 0 \quad \text{ce qui est absurde .}$$

Q est donc un ouvert . $\square$

On énonce le :

Théorème 2.2 :

Sous l'hypothèse (H) , pour tout $f \in L^1(Q)$ avec $\sqrt{t} f \in L^2(Q)$ et tout $u_0 \in L^2(\Omega(0))$, il existe u unique vérifiant :

$$u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega(t))) , \quad u(0) = u_0$$

$$u(., t) \in H_0^1(\Omega(t)) \quad \text{p.p. } t$$

$$\sqrt{t} u_t \in L^2(Q)$$

$$u_t = \Delta u + f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q) .$$

Si de plus $u_0 \in H_0^1(\Omega(0))$ et $f \in L^2(Q)$ alors $u_t \in L^2(Q)$.

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ contenant tous les $\Omega(t)$ pour tout $t \in [0, T[$. On prolonge f et u_0 par 0 dans $\Omega \times]0, T[\setminus Q$.

On va montrer que les conclusions du théorème 2.2 se déduisent du théorème abstrait 1.2 avec $H = L^2(\Omega)$.

Pour $u \in L^2(\Omega)$ on pose :

$$\varphi^t(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx & \text{si } u \in H^1(\Omega) \\ & u = 0 \text{ p.p. } \Omega \setminus \Omega(t) \\ + \infty & \text{sinon .} \end{cases}$$

On a la caractérisation du sous-différentiel de φ^t :

$$g \in \partial \varphi^t(u) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ u = 0 & \Omega \setminus \Omega(t) \\ -\Delta u = g & \mathcal{D}'(\Omega(t)) \end{cases}$$

Pour $\lambda > 0$, $u \in L^2(\Omega)$, on a en posant $u_{\lambda}^t = (I + \lambda \partial \varphi^t)^{-1} u$:

$$\varphi_{\lambda}^t(u) = \varphi^t(u_{\lambda}^t) + \frac{1}{2\lambda} \|u - u_{\lambda}^t\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

On va montrer la :

Proposition 2.3 :

Sous l'hypothèse (H) , pour $u \in L^2(\Omega)$, $t \longrightarrow \varphi_\lambda^t(u)$ est à variation bornée , continue à droite , et vérifie :

$$(2-18) \quad d\varphi_\lambda^t(u) \leq C \rho(t) \left\| \partial \varphi_\lambda^t(u) \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \left\| u \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} dt$$

au sens des mesures , C étant une constante positive ne dépendant pas de t ni de λ .

Démonstration :

Elle revient , pour l'essentiel , à justifier les calculs formels du cas général exposé au début de ce chapitre , en utilisant la formule d'Hadamard . L'utilisation de cette formule nécessite plus de régularité de ϕ en t (c'est-à-dire plus de régularité dans la dépendance des $\Omega(t)$ en t) . On commence donc par régulariser ϕ en t ; on obtiendra alors les conclusions de la proposition 2.3 par passage à la limite .

1- Régularisation de ϕ .

Soit $\mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \mu \subset [0, 1]$ un noyau régularisant , avec $\mu \geq 0$ et $\int_0^1 \mu(s) ds = 1$.

On pose pour $\epsilon > 0$:

$$(2-19) \quad \phi_\epsilon(t, x) = \int_0^1 \mu(s) \phi(t + \epsilon s, x) ds$$

pour $t \in [0, T - \epsilon]$, $x \in U$.

Pour $x \in U$ fixe , $t \longrightarrow \phi_\epsilon(t, x)$ est de classe C^1 sur $[0, T - \epsilon]$.

Pour ϵ suffisamment petit , $\text{grad}_x \phi_\epsilon(t, x) \neq 0$, pour tout $t \in [0, T - \epsilon]$ et tout $x \in U$.

On pose alors pour $t \in [0, T - \epsilon]$:

$$\Omega_\epsilon(t) = \{x \in \Omega \text{ tels que } \phi_\epsilon(t, x) < 0\} \cup (\Omega(t) \setminus \Omega)$$

$$(2-20) \quad \rho_\epsilon(t, x) = \frac{1}{|\text{grad}_x \phi_\epsilon(t, x)|} \int_0^1 \mu(t) \frac{\partial \phi}{\partial t}(t + \epsilon s, x) ds$$

$$n_\epsilon(z, t) = \frac{\text{grad}_x \phi_\epsilon(t, z)}{|\text{grad}_x \phi_\epsilon(t, z)|}$$

On définit alors, comme précédemment, pour $u \in L^2(\Omega)$:

$$\varphi_\epsilon^t(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_\Omega |\text{grad } u|^2 dx & \text{si } u \in H^1(\Omega) \\ & u = 0 \text{ p.p. } \Omega \setminus \Omega_\epsilon(t) \\ + \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_{\epsilon, \lambda}^t(u) = \varphi_\epsilon^t(u_{\epsilon, \lambda}^t) + \frac{1}{2\lambda} \|u - u_{\epsilon, \lambda}^t\|_{L^2(\Omega)}^2$$

où :

$$u_{\epsilon, \lambda}^t = (1 + \lambda \partial \varphi_\epsilon^t)^{-1} u$$

et vérifie :

$$(2-21) \quad \begin{cases} u_{\epsilon, \lambda}^t - \lambda \Delta u_{\epsilon, \lambda}^t = u & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_\epsilon(t)) \\ u_{\epsilon, \lambda}^t = 0 & \Gamma_\epsilon(t) \end{cases}$$

$\Gamma_\epsilon(t)$ étant le bord de $\Omega_\epsilon(t)$.

On note que $u_{\epsilon, \lambda}^t \in H^2(\Omega_\epsilon(t))$.

En utilisant la formule de Green et (2-21) l'expression précédente de

$\varphi_{\epsilon, \lambda}^t(u)$ devient :

$$\begin{aligned} \varphi_{\epsilon, \lambda}^t(u) &= \frac{1}{2} \int_\Omega |\text{grad } u_{\epsilon, \lambda}^t|^2 dx + \frac{1}{2\lambda} \int_\Omega (u_{\epsilon, \lambda}^t - u)^2 dx \\ &= \frac{1}{2\lambda} \int_\Omega u(u - u_{\epsilon, \lambda}^t) dx. \end{aligned}$$

2- Calcul de $\frac{d \varphi_{\epsilon, \lambda}^t}{dt}$.

Lemme 2.7 :

Avec les notations précédentes on a :

$$(2-22) \quad \frac{d}{dt} \varphi_{\epsilon, \lambda}^t(u) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\epsilon}(t)} \rho_{\epsilon}(t, z) \left(\frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_{\epsilon}} \right)^2 d\gamma(z)$$

Remarque 2.5 :

L'identité du lemme 2.7 n'est autre que l'identité formelle (2-6) de la section II.1 dans le cas particulier du laplacien .

Soit $G(t, ., .)$ la fonction de Green pour l'opérateur $I - \lambda \Delta$, de l'ouvert $\Omega_{\epsilon}(t)$ prolongée par 0 en dehors de $\overline{\Omega}_{\epsilon}(t) \times \overline{\Omega}_{\epsilon}(t)$.

$G(t, x, .) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C^0(\mathbb{R}^N \setminus \{x\})$ et vérifie :

$$\begin{cases} G(t, x, .) - \lambda \Delta G(t, x, .) = \delta_x & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega_{\epsilon}(t)) \\ G(t, x, .) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus \Omega_{\epsilon}(t) \end{cases}$$

On s'est mis dans les conditions de régularité pour pouvoir appliquer le

Lemme 2.8 :

$(t, x, y) \longrightarrow G(t, x, y)$ est de classe C^1 sur l'ensemble $\{(t, x, y), t \in [0, T - \epsilon[, x, y \in \Omega_{\epsilon}(t), x \neq y\}$ et vérifie :

$$(2-23) \quad \frac{\partial G}{\partial t}(t, x, y) = \frac{\partial G}{\partial n_{\epsilon}}(x, z) \frac{\partial G}{\partial n_{\epsilon}}(y, z) \rho_{\epsilon}(t, z) d\gamma(z)$$

La formule (2-23) est connue sous le nom de la formule d'Hadamard . Pour la démonstration , on renvoie à P.R. Garabedian - M. Schiffer [12] et D. Fujiwara - S. Ozawa [10] .

Preuve du lemme 2.7 :

On exprime $u_{\epsilon, \lambda}^t$ solution de (2-21) à l'aide de G :

$$u_{\epsilon, \lambda}^t(x) = \int_{\Omega_{\epsilon}(t)} G(t, x, y) u(y) dy$$

pour $t \in [0, T - \epsilon]$, $x \in \Omega_{\epsilon}(t)$.

On va d'abord établir une expression simple de $\frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt}$ en utilisant (2-23).

On prendra dans ce qui suit $u \in L^{\infty}(\Omega)$; le cas $u \in L^2(\Omega)$ s'obtient facilement par densité.

On énonce le :

Lemme 2.9 :

$(t, x) \rightarrow u_{\epsilon, \lambda}^t(x)$ est lipschitzienne sur $[0, T - \epsilon] \times \Omega$,
de classe C^1 sur :

$$\{(t, x), x \in \Omega(t)\}$$

avec :

$$(2-24) \quad \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt}(x) = \int_{\Gamma_{\epsilon}(t)} \frac{\partial G}{\partial n_{\epsilon}}(x, z) \frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_{\epsilon}}(z) \rho_{\epsilon}(t, z) d\gamma(z)$$

Preuve :

Soit $x \in \Omega_{\epsilon}(t)$ fixe.

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (u_{\epsilon, \lambda}^{t+h}(x) - u_{\epsilon, \lambda}^t(x)) &= \\ &= \frac{1}{h} \int_{\Omega_{\epsilon}(t+h)} G(t+h, x, y) u(y) dy - \frac{1}{h} \int_{\Omega_{\epsilon}(t)} G(t, x, y) u(y) dy \\ &= \frac{1}{h} \int_{\Omega_{\epsilon}(t+h) \setminus \Omega_{\epsilon}(t)} G(t+h, x, y) u(y) dy - \frac{1}{h} \int_{\Omega_{\epsilon}(t) \setminus \Omega_{\epsilon}(t+h)} G(t, x, y) u(y) dy \\ &\quad + \int_{\Omega_{\epsilon}(t) \cap \Omega_{\epsilon}(t+h)} \frac{1}{h} (G(t+h, x, y) - G(t, x, y)) u(y) dy. \end{aligned}$$

On remarquera que pour h assez petit $x \in \Omega_\epsilon(t) \cap \Omega_\epsilon(t+h)$.

- On montre que :

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega_\epsilon(t+h) \setminus \Omega_\epsilon(t)} G(t+h, x, y) u(y) dy \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 .$$

D'après le lemme 2.8 , $G(t+h, x, \cdot) \in C^1(\Omega_\epsilon(t+h) \setminus \{x\})$, pour $z \in \Gamma_\epsilon(t+h)$ on a la formule des accroissements finis :

$$G(t+h, x, y) = G(t+h, x, z) + (y-z) \operatorname{grad}_y G(t+h, x, \theta y + (1-\theta)(y-z))$$

où $\theta \in [0, 1]$. Comme $G(t+h, x, z) = 0$, on a :

$$|G(t+h, x, y)| \leq C r(y) \text{ où } r(y) = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega_\epsilon(t+h))$$

C constante positive indépendante de y et de h .

Pour h suffisamment petit :

$$r(y) \leq C_1 h$$

C_1 constante indépendante de h et y . On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \left| \int_{\Omega_\epsilon(t+h) \setminus \Omega_\epsilon(t)} G(t+h, x, y) u(y) dy \right| &\leq C_1 \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \operatorname{mes}(\Omega_\epsilon(t+h) \setminus \Omega_\epsilon(t)) \\ &\leq C_2 h \end{aligned}$$

C_2 constante indépendante de h .

D'où :

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega_\epsilon(t+h) \setminus \Omega_\epsilon(t)} G(t+h, x, y) u(y) dy \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 .$$

- On montre de façon analogue que :

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega_\epsilon(t) \setminus \Omega_\epsilon(t+h)} G(t, x, y) u(y) dy \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 .$$

- On examine maintenant :

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega_\epsilon(t) \cap \Omega_\epsilon(t+h)} (G(t+h, x, y) - G(t, x, y)) u(y) dy .$$

D'après le lemme 2.8 :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(t+h, x, y) - G(t, x, y)}{h} &= \frac{\partial G}{\partial t}(t, x, y) \\ &= \frac{\partial G}{\partial n_\epsilon}(t, x, y) = \int_{\Gamma_\epsilon(t)} \frac{\partial G}{\partial n_\epsilon}(x, z) \frac{\partial G}{\partial n_\epsilon}(y, z) \rho_\epsilon(t, z) d\gamma(z) . \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Lebesgue :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon(t) \cap \Omega_\epsilon(t+h)} \frac{1}{h} (G(t+h, x, y) - G(t, x, y)) u(y) dy &= \\ &= \int_{\Omega_\epsilon(t)} \frac{\partial G}{\partial t}(t, x, y) u(y) dy = \\ &= \int_{\Omega_\epsilon(t)} u(y) \left(\int_{\Gamma_\epsilon(t)} \frac{\partial G}{\partial n_\epsilon}(x, y) \frac{\partial G}{\partial n_\epsilon}(y, z) \rho_\epsilon(t, z) d\gamma(z) \right) dy . \end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned} \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt}(x) &= \int_{\Omega_\epsilon(t)} u(y) \left(\int_{\Gamma_\epsilon(t)} \frac{\partial G}{\partial n_\epsilon}(x, y) \frac{\partial G}{\partial n_\epsilon}(y, z) \rho_\epsilon(t, z) d\gamma(z) \right) dy \\ &= \int_{\Gamma_\epsilon(t)} \frac{\partial G}{\partial n_\epsilon}(x, z) \frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_\epsilon}(z) \rho_\epsilon(t, z) d\gamma(z) . \end{aligned}$$

$\frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt}$ vérifie :

$$(2-25) \quad \begin{cases} \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} - \lambda \Delta \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} = 0 & \text{dans } \Omega_\epsilon(t) \\ \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} = - \rho_\epsilon(t, z) \frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_\epsilon} & \text{dans } \Gamma_\epsilon(t) \end{cases}$$

Pour $x \in \Omega$, $t \longrightarrow u_{\epsilon, \lambda}^t(x)$ est dérivable sur l'ensemble $\{t \in [0, T - \epsilon] \text{ tels que } x \in \Omega_\epsilon(t)\}$, de dérivée bornée indépendamment de x . En effet, en appliquant le principe du maximum à (2-25), on obtient :

$$\left\| \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} \right\|_{L^\infty(\Omega_\epsilon(t))} \leq \text{Cste indépendante de } t.$$

D'autre part, $t \longrightarrow u_{\epsilon, \lambda}^t(x)$ est dérivable de dérivée nulle sur l'ensemble $\{t \in [0, T - \epsilon] \text{ tels que } x \notin \overline{\Omega_\epsilon(t)}\}$. Enfin, comme l'ensemble $\{x; \{t, x \in \Gamma_\epsilon(t)\} \text{ dénombrable}\}$ est dense, on obtient que :

$$t \longrightarrow u_{\epsilon, \lambda}^t(x) \text{ est lipschitzienne sur } [0, T - \epsilon]$$

de rapport indépendant de x . $\square$

Calcul de $\frac{d\varphi_{\epsilon, \lambda}^t}{dt}(u)$:

$$\frac{1}{h} \left(\varphi_{\epsilon, \lambda}^{t+h}(u) - \varphi_{\epsilon, \lambda}^t(u) \right) = -\frac{1}{2\lambda h} \int_{\Omega} u(u_{\epsilon, \lambda}^{t+h} - u_{\epsilon, \lambda}^t) dx$$

$$= -\frac{1}{2\lambda h} \int_{\Omega_\epsilon(t, t+h)} u(u_{\epsilon, \lambda}^{t+h} - u_{\epsilon, \lambda}^t) dx - \frac{1}{2\lambda h} \int_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon(t, t+h)} u(u_{\epsilon, \lambda}^{t+h} - u_{\epsilon, \lambda}^t) dx$$

où l'on a posé $\Omega_\epsilon(t, t+h) = \bigcup_{t \leq s \leq t+h} \Omega_\epsilon(s)$.

$$-\frac{1}{2\lambda h} \int_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon(t, t+h)} u(u_{\epsilon, \lambda}^{t+h} - u_{\epsilon, \lambda}^t) dx = -\frac{1}{2\lambda h} \int_{E \setminus \Omega_\epsilon(t, t+h)} u(u_{\epsilon, \lambda}^{t+h} - u_{\epsilon, \lambda}^t) dx$$

où :

$$E = \bigcup_{t \leq s \leq t+h} \Omega_\epsilon(s).$$

$$\left| \int_{E \setminus \Omega_\epsilon(t, t+h)} u(u_{\epsilon, \lambda}^{t+h} - u_{\epsilon, \lambda}^t) dx \right| \leq Ch \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \text{mes}(E \setminus \Omega_\epsilon(t, t+h))$$

où C est la constante de Lipschitz de $(t, x) \longrightarrow u_{\epsilon, \lambda}^t(x)$.

Comme $\text{mes}(E \setminus \Omega_\epsilon(t, t+h)) \leq C'h$ où C' est une constante positive indépendante de h , on a donc :

$$\frac{1}{2\lambda h} \int_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon(t, t+h)} u(u_{\epsilon, \lambda}^{t+h} - u_{\epsilon, \lambda}^t) dx \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

• Compte-tenu du lemme 2.9 et en utilisant le théorème de Lebesgue :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\Omega_\epsilon(t, t+h)} u(u_{\epsilon, \lambda}^{t+h} - u_{\epsilon, \lambda}^t) dx = \int_{\Omega_\epsilon(t)} u \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} dx .$$

On a donc établi que :

$$(2-26) \quad \frac{d\varphi_{\epsilon, \lambda}^t}{dt}(u) = -\frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega_\epsilon(t)} u \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} dx .$$

Comme $u = u_{\epsilon, \lambda}^t - \lambda \Delta u_{\epsilon, \lambda}^t$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_\epsilon(t))$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega_\epsilon(t)} u \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} dx &= -\frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega_\epsilon(t)} u_{\epsilon, \lambda}^t \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon(t)} \Delta u_{\epsilon, \lambda}^t \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} dx . \end{aligned}$$

Par la formule de Green :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon(t)} \Delta u_{\epsilon, \lambda}^t \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} dx &= \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon(t)} \text{grad } u_{\epsilon, \lambda}^t \cdot \text{grad} \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\epsilon(t)} \frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_\epsilon} \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} d\gamma(z) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon(t)} u_{\epsilon, \lambda}^t \Delta \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\epsilon(t)} \frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_\epsilon} \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} d\gamma(z) . \end{aligned}$$

On d'après (2-25) :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon(t)} u_{\epsilon, \lambda}^t \Delta \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} dx = \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega_\epsilon(t)} u_{\epsilon, \lambda}^t \frac{du_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} dx$$

(2-26) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d \varphi_{\epsilon, \lambda}^t}{dt}(u) &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\epsilon}(t)} \frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_{\epsilon}} \frac{d u_{\epsilon, \lambda}^t}{dt} d \gamma(z) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\epsilon}(t)} \rho_{\epsilon}(t, z) \left(\frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_{\epsilon}} \right)^2 d \gamma(z) \end{aligned}$$

d'après (2-25) .

Ce qui établit (2-22) et achève la preuve du lemme 2.7 . $\square$

3- Fin de la démonstration de la proposition 2.3 .

On reprend l'expression (2-20) de ρ_{ϵ} .

Grâce à (2-17) on a :

$$\begin{aligned} -\rho_{\epsilon}(t, x) &= \frac{-1}{|\operatorname{grad}_x \phi_{\epsilon}(t, x)|} \int_0^1 \mu(s) \frac{\partial \phi}{\partial t}(t + \epsilon s, x) ds \\ &\leq \frac{1}{|\operatorname{grad}_x \phi_{\epsilon}(t, x)|} \int_0^1 \mu(s) \rho(t + \epsilon s) |\operatorname{grad}_x \phi(t + \epsilon s, x)| ds. \end{aligned}$$

On pose alors :

$$\tilde{\rho}_{\epsilon}(t) = \frac{1}{|\operatorname{grad} \phi_{\epsilon}(t, x)|} \int_0^1 \mu(s) \rho(t + \epsilon s) |\operatorname{grad}_x \phi(t + \epsilon s, x)| ds .$$

On remarquera que $\tilde{\rho}_{\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \rho$ dans $L^4(0, T)$.

On majore le second membre de (2-22) :

$$\begin{aligned} (2-27) \quad \frac{d}{dt} \varphi_{\epsilon, \lambda}^t(u) &\leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\epsilon}(t)} \tilde{\rho}_{\epsilon}(t) \left(\frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_{\epsilon}} \right)^2 d \gamma(z) \\ &= \frac{\tilde{\rho}_{\epsilon}(t)}{2} \int_{\Gamma_{\epsilon}(t)} \left(\frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_{\epsilon}} \right)^2 d \gamma(z) . \end{aligned}$$

On estime $\left\| \frac{\partial u_{\epsilon, \lambda}^t}{\partial n_{\epsilon}} \right\|_{L^2(\Gamma_{\epsilon}(t))}^2$ par le :

Lemme 2.10 :

Soit $v \in H_0^1(\mathcal{O}) \cap H^2(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Alors on a l'estimation :

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial \mathcal{O})}^2 \leq C \left\| \Delta v \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^{\frac{3}{2}} \left\| v \right\|_{L^2(\mathcal{O})}^{\frac{1}{2}}$$

où $\partial \mathcal{O}$ est la frontière de $\mathcal{O}$ et C une constante positive ne dépendant que du diamètre de $\mathcal{O}$ et de la courbure de $\partial \mathcal{O}$.

On donnera une démonstration de ce lemme dans l'appendice.

Compte-tenu de cette estimation, (2-27) devient alors :

$$(2-28) \quad \frac{d}{dt} \varphi_{\epsilon, \lambda}^t(u) \leq C \frac{\tilde{\rho}_{\epsilon}(t)}{2} \left\| \Delta u_{\epsilon, \lambda} \right\|_{L^2(\Omega_{\epsilon}(t))}^{\frac{3}{2}} \left\| u_{\epsilon, \lambda}^t \right\|_{L^2(\Omega_{\epsilon}(t))}^{\frac{1}{2}}.$$

On note que $u_{\epsilon, \lambda}^t$ est bornée indépendamment de ϵ dans $H^2(\Omega_{\epsilon}(t))$.

On obtient donc que :

$$u_{\epsilon, \lambda}^t \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u_{\lambda}^t \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

On a alors :

$$\left\| \Delta u_{\epsilon, \lambda}^t \right\|_{L^2(\Omega_{\epsilon}(t))}^{\frac{3}{2}} \leq \left\| \frac{u - u_{\epsilon, \lambda}^t}{\lambda} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{u - u_{\lambda}^t}{\lambda} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}}.$$

De (2-28) on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_{\epsilon, \lambda}^{t+h}(u) - \varphi_{\epsilon, \lambda}^t(u) &= \int_t^{t+h} \frac{d\varphi_{\epsilon, \lambda}^s(u)}{ds} ds \\ &\leq C \int_t^{t+h} \tilde{\rho}_{\epsilon}(s) \left\| \Delta u_{\epsilon, \lambda}^s \right\|_{L^2(\Omega_{\epsilon}(s))}^{\frac{3}{2}} \left\| u_{\epsilon, \lambda}^s \right\|_{L^2(\Omega_{\epsilon}(s))}^{\frac{1}{2}} ds \end{aligned}$$

soit encore :

$$(2-29) \quad \begin{aligned} \varphi_{\epsilon, \lambda}^{t+h}(u) - \varphi_{\epsilon, \lambda}^t(u) &\leq \\ &\leq C \int_t^{t+h} \tilde{\rho}_{\epsilon}(s) \left\| \frac{u - u_{\epsilon, \lambda}^s}{\lambda} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|u_{\epsilon, \lambda}^s\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} ds . \end{aligned}$$

Comme :

$$\varphi_{\epsilon, \lambda}^t(u) = \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} u(u - u_{\epsilon, \lambda}^t) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \varphi_{\lambda}^t(u) = \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} u(u - u_{\lambda}^t)$$

on obtient par passage à la limite dans (2-29) :

$$\varphi_{\lambda}^{t+h}(u) - \varphi_{\lambda}^t(u) \leq C \int_t^{t+h} \rho(s) \left\| \frac{u - u_{\lambda}^s}{\lambda} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|u_{\lambda}^s\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} ds .$$

D'où :

$$\begin{aligned} d\varphi_{\lambda}^t(u) &\leq C \rho(t) \left\| \frac{u - u_{\lambda}^t}{\lambda} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|u_{\lambda}^t\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq C \rho(t) \|\partial \varphi_{\lambda}^t(u)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

au sens des mesures .

Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.3 . $\square$

4- Démonstration du théorème 2.2 .

Dans la proposition 2.3 , on a établi les deux hypothèses du théorème abstrait 1.2 du chapitre I . D'après ce résultat , on obtient l'existence de $\hat{u}$ unique solution forte de :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + \partial \varphi^t(\hat{u}) \ni \hat{f} & 0 < t < T \\ \hat{u}(0) = \hat{u}_0 \end{cases}$$

$\hat{u} \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ avec $\sqrt{t} \frac{d\hat{u}}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ où l'on rappelle que $\hat{f}$ et $\hat{u}_0$ sont respectivement les extensions de f et u_0 à $\Omega \times]0, T[\setminus Q$ par 0 . En considérant la restriction de $\hat{u}$ à Q on obtient les conclusions du théorème 2.2 . $\square$

APPENDICE

Preuve du lemme 2.10 :

Soit ζ solution de :

$$\begin{cases} \zeta - \Delta \zeta = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 1 & \text{sur } \partial \mathcal{O} \end{cases}$$

ζ existe et appartient à $H^2(\mathcal{O}) \cap C^1(\bar{\mathcal{O}})$ car $\mathcal{O}$ est régulier .

Comme $v \in H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$ on écrit alors :

$$\begin{aligned} (A-1) \quad \int_{\partial \mathcal{O}} |\text{grad } v|^2 d\gamma &= \int_{\partial \mathcal{O}} |\text{grad } v|^2 \frac{\partial \zeta}{\partial n} d\gamma \\ &= \int_{\mathcal{O}} |\text{grad } v|^2 \Delta \zeta + \int_{\mathcal{O}} \text{grad } \zeta \cdot \text{grad } (|\text{grad } v|^2) \\ &= \int_{\mathcal{O}} |\text{grad } v|^2 \zeta + 2 \int_{\mathcal{O}} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \end{aligned}$$

L'estimation d' Agmon - Douglis - Nirenberg [1] permet d'avoir :

$$(A-2) \quad \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C \|\Delta v\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

où C est une constante dépendant uniquement de la courbure et du diamètre de $\mathcal{O}$.

D'autre part :

$$(A-3) \quad \|\text{grad } v\|_{L^2(\mathcal{O})}^2 \leq \|\Delta v\|_{L^2(\mathcal{O})} \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}$$

$$(A-4) \quad \|v\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C_1 \|\text{grad } v\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C_1 \|\Delta v\|_{L^2(\mathcal{O})}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^{\frac{1}{2}}$$

où C_1 est la constante de Poincaré .

De (A-1) on obtient , en utilisant (A-2) , (A-3) et (A-4) :

$$\int_{\partial \mathcal{O}} |\text{grad } v|^2 d\gamma \leq C_2 \|\Delta v\|_{L^2(\mathcal{O})}^{\frac{3}{2}} \|v\|_{L^2(\mathcal{O})}^{\frac{1}{2}}$$

où $C_2 = C_1 \|\zeta\|_{L^\infty(\mathcal{O})} + C \|\text{grad } \zeta\|_{L^\infty(\mathcal{O})}$

ce qui établit le résultat du lemme . $\square$

Démonstration directe dans le cas du demi - espace :

On va donner une démonstration directe du résultat du lemme dans le cas où $\mathcal{O}$ est le demi-espace :

$$\mathbf{R}_+^N = \{(x', z), x' \in \mathbf{R}^{N-1}, z > 0\} .$$

On pose :

$$(A-5) \quad \Delta v = g$$

ce qui s'écrit encore :

$$(A-6) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \Delta_{x'} v = g .$$

On multiplie (A-6) par $\frac{\partial v}{\partial z}$ d'où :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 = (g - \Delta_{x'} v) \frac{\partial v}{\partial z} .$$

On intègre sur x' :

$$(A-7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dx' &= \\ &= \int_{\mathbf{R}^{N-1}} g \frac{\partial v}{\partial z} dx' - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \text{grad}_{x'} v^2 dx' \end{aligned}$$

car :

$$\int_{\mathbf{R}^{N-1}} \Delta_{x'} v \frac{\partial v}{\partial z} dx' = \frac{\partial}{\partial z} \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \text{grad}_{x'} v^2 dx' .$$

On intègre (A-7) en z . D'où :

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dx' = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g \frac{\partial v}{\partial z} dx' dz$$

car :

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\text{grad}_{x'} u|^2 dx = 0$$

soit encore :

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{\partial v}{\partial z}(x', 0) \right)^2 dx' = \int_{\mathbb{R}_+^N} g \frac{\partial v}{\partial z} dx .$$

D'où :

$$(A-8) \quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{\partial v}{\partial z}(x', 0) \right)^2 \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \left\| \frac{\partial v}{\partial z} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} .$$

Comme :

$$\|\text{grad } v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}_+^N} g v \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}$$

et que :

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial z} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|\text{grad } v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}$$

on obtient alors :

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial z} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}^{\frac{1}{2}} .$$

D'où de (A-8) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{\partial v}{\partial z}(x', 0) \right)^2 &\leq 2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}^{\frac{3}{2}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \|\Delta v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}^{\frac{3}{2}} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)}^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

□

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AGMON S. - DOUGLIS A. - NIRENBERG L. :
Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I .
Comm. Pure Appl. Math. 12 , 623-727 (1959) .
- [2] ATTOUCH H. :
Mesurabilité et monotonie .
Publication Mathématique d'Orsay N° 183-76-53 ,
Paris XI .
- [3] ATTOUCH H. - DAMLAMIAN A. :
Problème d'évolution dans les Hilberts et applications .
Journal de Maths . Pures et Appl. 54 , 1975 , 53-74.
- [4] ATTOUCH A. - DAMLAMIAN A. :
Solutions fortes d'inéquations variationnelles d'évolution .
Publication Mathématique d'Orsay (ou A. Damlamian thèse d'Etat 1976) .
- [5] ATTOUCH A. - DAMLAMIAN A. :
Application des méthodes de convexité et monotonie à l'étude de certaines équations quasi-linéaires .
Proceedings Royal Soc. Edinburgh .
- [6] BARBU V. :
Nonlinear Semigroups and differential equations in Banach spaces .
Noordhoff International Publ. Leyden the Netherlands 1976 .

- [7] BENILAN Ph. - BREZIS H. :
Solutions faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert .
Ann. Inst. Fourier , Grenoble 22 (1972), 311-329 .
- [8] BREZIS H. :
Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert .
North-Holland (1973) .
- [9] FUJITA H. :
The penalty method on some nonlinear initial value problems . Contributions to nonlinear functional analysis edited by E.H. Zarantonello Academic Press (1971) , 635-665 .
- [10] FUJIWARA D. - OZAWA S. :
The Hadamard variational formula for the Green functions of some normal elliptic boundary value problems .
Proc. Japan Acad. 54 , Ser. A , (1978) .
- [11] GARABEDIAN P.R. :
Partial differential equations .
J. Wiley and Sons , Inc. New-York (1964) .
- [12] GARABEDIAN P.R. - SCHIFFER M. :
Convexity of domain functionals .
J. Anal. Math. 2 , 281-368 (1952 - 53) .
- [13] KENMOCHI N. :
Some nonlinear parabolic variational inequalities .
Israël J. Math. 22 (1975) , 304-331 .
- [14] LIONS J.L. :
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires .
Dunod - Gauthier Villars (1969) .

[15] YAMADA Y. :

On evolution equations generated by subdifferential operators .

J. Fac. Sci. Tokyo 23 (1976) , 491-515 .

[16] YAMADA Y. :

Periodic solutions of certain nonlinear parabolic differential equations in domains with periodically moving boundaries .

Nagoya Math. J. vol. 70 (1978) , 111-123 .

[17] YOSIDA K. :

Functional analysis . Springer-Verlag 1978 .

DEUXIEME PARTIE

EXISTENCE DE SOLUTIONS DANS $W^{2,p}(\Omega)$ D'EQUATIONS
QUASI - LINEAIRES ELLIPTIQUES

CHAPITRE I : Théorèmes d'existence .

- I.1 : Hypothèses et théorème d'existence 76
I.2 : Conditions d'existence 78

CHAPITRE II : Estimations à priori .

- II.1 : Estimations höldériennes du gradient 86
II.2 : Estimation de $\sup_{\Omega} |u|$ 88
II.3 : Estimation du gradient au bord 90
II.4 : Estimation globale du gradient 94

BIBLIOGRAPHIE .-

CHAPITRE I

THEOREME D'EXISTENCE

Dans ce chapitre , on étudie l'existence de solutions des problèmes quasi-linéaires uniformément elliptiques dans $W^{2,p}(\Omega)$, où Ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $p > N$.

On considère le problème de Dirichlet :

$$(1-1) \quad \begin{cases} \operatorname{div} a(x, u(x), Du(x)) + b(x, u(x), Du(x)) = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

où : $a = (a_i)_{1 \leq i \leq N}$ $a_i : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

et : $b : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dans le cas où a est différentiable par rapport à ses arguments , le problème (1-1) est un cas particulier d'équations elliptiques quasi-linéaires de type :

$$(1-2) \quad \begin{cases} \sum_{i,j} a_{ij}(x, u(x), Du(x)) D_{ij} u + \beta(x, u(x), Du(x)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

En effet , si l'on pose :

$$a_{ij}(x, z, p) = \frac{\partial a_i}{\partial p_j}$$

$$B(x, z, p) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial z} p_i + b(x, z, p)$$

(1-1) se ramène à (1-2) .

Dans ce qui suit , on énonce un résultat d'existence de solutions de (1-1) . On montrera que ce résultat se ramène par application d'un théorème de point fixe à établir des estimations à priori .

1.1.- HYPOTHESES ET THEOREME D'EXISTENCE .

On suppose que :

(H1) Pour $i = 1, \dots, N$, $a_i : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 . Il existe $\tau > -1$, ν et μ fonctions réelles positives respectivement non croissante et non décroissante telles que :

$$\begin{aligned} \nu(|z|)(1+|p|)^\tau |\xi|^2 &\leq \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(x, z, p) \xi_i \xi_j \\ &\leq \mu(|z|)(1+|p|)^\tau |\xi|^2 \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(x, z, p) \right| \leq \mu(|z|)(1+|p|)^\tau ,$$

$$\forall (x, z, p) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N .$$

(H2) $b : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0 vérifiant :

$$(1+|p|) |D_z a_i| + |D_{x_i} a_i| + |b| \leq \mu(|z|)(1+|p|)^{\tau+2}$$

pour tout $(x, z, p) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

(H3) Il existe μ_1, μ_2 constantes positives telles que :

$$\frac{\beta(x, z, p) \operatorname{sign} z}{\nu(|z|)} \leq \mu_1 |p| + \mu_2$$

pour tout $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^N$ où :

$$\beta(x, z, p) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial z} p_i + b(x, z, p)$$

Théorème 1.1 :

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de bord $\partial\Omega$ de classe C^2 . Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3) il existe alors une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, de (1-1).

Remarque 1.1 :

La solution u obtenue ci-dessus n'est pas classique.

En effet, l'hypothèse faite quant à la régularité de b , n'est pas suffisante pour avoir une telle solution.

Il est bien connu que la solution v de :

$$\Delta v = f$$

pour $f \in C^0(\bar{\Omega})$ n'est pas de classe C^2 .

Remarque 1.2 :

On n'a pas l'unicité dans le théorème 1.1.

Les hypothèses $(H1)$, $(H2)$, $(H3)$ ne permettent pas d'avoir d'unicité globale. On considère le contre-exemple :

Soit :

$$f(z) = \begin{cases} \sqrt[3]{6|z|} (2 - 3\sqrt[3]{6|z|}) & \text{si } z \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(u) = u_{xx} \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

admet deux solutions dans $[-1, 1]$:

la solution nulle et $u(x) = \frac{1}{6}(1 - x^2)^3$.

1.2. - CONDITIONS D'EXISTENCE .

On va montrer dans cette section que l'existence de solutions de (1-2) (et en particulier de (1-1)) dans $W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, se ramène par application du théorème de point fixe de Schaefer à établir des estimations à priori .

On se place donc dans le cadre général des équations quasi-linéaires elliptiques de type (1-2) .

On suppose que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de bord de classe C^1 .

On considère :

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij} : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \quad i, j = 1, \dots, N \\ B : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{continues . On suppose que :} \\ a = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}} \\ \text{est uniformément elliptique .} \end{array} \right.$$

C'est-à-dire que :

$$\xi a_{ij} \xi > 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N$$

et si on désigne par $\lambda(x, z, p)$ et $\Lambda(x, z, p)$ respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de a , alors :

$$\frac{\Lambda}{\lambda} \text{ est borné dans } \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N .$$

$$\text{Soit } \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 - \frac{N}{p} .$$

Théorème 1.2 :

Sous les hypothèses ci-dessus sur Ω , a_{ij} et B , s'il existe M constante positive telle que pour tout $\sigma \in [0, 1]$ et tout $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, vérifiant :

$$(1-4) \quad \begin{cases} a_{ij}(x, \sigma u, \sigma Du) D_{ij} u + \sigma \beta(x, u, Du) = 0 & \text{p.p. } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

on ait :

$$\|u\|_{C^{1,\delta}(\bar{\Omega})} \leq M$$

alors (1-4) admet effectivement une solution dans $W^{2,p}(\Omega)$.

Donc pour $\sigma = 1$ le problème (1-2) admet une solution dans $W^{2,p}(\Omega)$.

Démonstration :

Soit $u \in C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$ fixe . On pose pour $x \in \Omega$:

$$a_{ij}(x) = a_{ij}(x, u(x), Du(x))$$

$$f(x) = \beta(x, u(x), Du(x)) .$$

On considère alors le problème en v :

$$(1-5) \quad \begin{cases} a_{ij}(x) D_{ij} v = f(x) & \text{p.p. dans } \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

(1-5) admet une solution unique $v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ [5] .

On définit alors l'application :

$$T : u \in C^{1,\delta}(\bar{\Omega}) \longrightarrow Tu = v \in W^{2,p}(\Omega) .$$

Comme $p > N$, et que l'injection de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$ est compacte , on montre alors :

Proposition 1.1 :

L'application $T : C^{1,\delta}(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$ est compacte .

Démonstration :

a) On montre d'abord que T est continue .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$ avec $u_n \rightarrow u$ dans $C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$. On pose :

$$v_n = T(u_n) .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n vérifie :

$$(1-6) \quad \begin{cases} a_{ij}(x, u_n(x), Du_n(x)) D_{ij} v_n + \beta(x, u_n(x), Du_n(x)) = 0 \\ v_n|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad \text{p.p. } \Omega$$

D'après le théorème d'Ascoli , les a_{ij} décrivent une famille équi - continue . On a alors l'estimation :

$$(1-7) \quad \|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \left(\|\beta(\cdot, u_n, Du_n)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \right)$$

où C ne dépend pas de n [2] , [9] .

On utilise alors le lemme suivant pour établir que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bor - née dans $W^{2,p}(\Omega)$:

Lemme 1.1 :

Soit $L = a_{ij} D_{ij} + a_i D_i + a$ un opérateur linéaire uniformément elliptique dans Ω , domaine borné de $\mathbb{R}^N$, à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ avec $a \leq 0$ et de constante d'ellipticité λ .

Soit $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, vérifiant pour $f \in L^\infty(\Omega)$:

$$Lu \geq f \quad (\text{resp. } = f) .$$

Alors :

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{C}{\lambda} \|f^-\|_{L^\infty(\Omega)}$$

respectivement :

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

où C est une constante positive dépendant du diamètre de Ω et de

$$\beta = \frac{1}{\lambda} \|b\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \quad b = (a_1, a_2, \dots, a_N).$$

Le résultat de ce lemme permet de supprimer le terme $\|v_n\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ dans l'estimation (1-7). Par conséquent, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

est bornée dans $W^{2,p}(\Omega)$. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers $\bar{v}$ dans $W^{2,p}(\Omega)$.

L'injection compacte $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$ permet d'obtenir une sous-suite qui converge fortement vers $\bar{v}$ dans $C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$.

On passe alors à la limite dans (1-5); d'où :

$$\begin{cases} a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} \bar{v} + \beta(x, u, Du) = 0 & \text{p.p. } x \in \Omega \\ \bar{v} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

L'unicité de la solution de ce problème dans $W^{2,p}(\Omega)$ entraîne que :

$$\bar{v} = Tu.$$

T est donc continue.

b) On montre que T transforme les bornés de $C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$ en des relativement compacts de $C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$.

En effet, soit B un borné de $C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$; $T(B)$ est borné dans $W^{2,p}(\Omega)$ d'après l'estimation (1-7) et le lemme 1.1.

Donc $T(B)$ est relativement compacte dans $C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$.

Ce qui achève la démonstration de la proposition 1.1. $\square$

Démonstration du lemme 1.1 :

On utilise le principe du maximum de J.M. Bony.

On suppose, sans perte de généralité, que Ω est tel que :

$$0 < x_1 < d \quad \text{où } d = \text{diam } \Omega .$$

On pose $L_0 = a_{ij} D_{ij} + a_i D_i$. Pour $\alpha \geq \beta + 1$ on a :

$$L_0 e^{\alpha x_1} = (\alpha^2 a_{11} + \alpha a_1) e^{\alpha x_1} \geq \lambda (\alpha^2 - \alpha \beta) e^{\alpha x_1} \geq \lambda .$$

On pose :

$$v = \sup_{\partial \Omega} u^+ + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_{\Omega} \frac{-f^-}{\lambda} .$$

$$\text{Comme } Lv = L_0 v + a v \leq -\lambda \sup_{\Omega} \frac{-f^-}{\lambda} \quad (a \leq 0)$$

on a :

$$(1-8) \quad L(v-u) = Lv - Lu \leq -\lambda \left(\sup_{\Omega} \frac{-f^-}{\lambda} + \frac{f^+}{\lambda} + \frac{f^-}{\lambda} \right) \leq 0$$

dans Ω

et :

$$v-u = \sup_{\partial \Omega} u^+ + (e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \sup_{\Omega} \frac{-f^-}{\lambda} - u^+ - u^- \geq 0 \quad \text{sur } \partial \Omega .$$

On applique alors le principe du maximum de J.M. Bony [4] .

Lemme 1.2 :

Soit L un opérateur linéaire vérifiant les mêmes conditions que dans le lemme 1.1 .

Si $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, vérifie $Lu \geq 0$ dans Ω , Ω ouvert borné, alors u ne peut atteindre de maximum positif sans être constante au voisinage .

Ω étant connexe, on obtient alors en appliquant ce lemme à (1-8) :

$$\sup_{\Omega} (u-v) \leq \sup_{\partial \Omega} (u-v) \leq 0 .$$

$$\text{Comme } \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} (u-v) + \sup_{\Omega} v \leq \sup_{\Omega} v$$

par définition de v on obtient :

$$\sup_{\Omega} v = \sup_{\partial \Omega} u^+ + C \sup_{\Omega} \frac{-f^-}{\lambda}$$

$$\text{où } C = e^{\alpha d} - 1 \quad \alpha \geq \beta + 1$$

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial \Omega} u^+ + C \sup_{\Omega} \frac{-f^-}{\lambda}.$$

En changeant u en $-u$ on obtient pour $Lu \leq f$:

$$\sup_{\Omega} (-u) \leq \sup_{\partial \Omega} (-u)^+ + (e^{\alpha d} - 1) \sup_{\Omega} \frac{-(f^-)}{\lambda}$$

d'où pour $Lu = f$:

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial \Omega} |u| + C \sup_{\Omega} \frac{|f|}{\lambda}.$$

Pour utiliser le théorème de Schaefer on introduit la famille d'équations pour $\sigma \in [0, 1]$:

$$(1-9) \quad \begin{cases} a_{ij}(x, \sigma u, \sigma Du) D_{ij} u + \sigma \beta(x, u, Du) = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ u|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases}$$

On "linéarise" (1-7) comme précédemment :

$$(1-10) \quad \begin{cases} a_{ij}(x, \sigma u, \sigma Du) D_{ij} v + \sigma \beta(x, u, Du) = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ v|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases}$$

(1-10) admet une solution unique $v \in W^{2,p}(\Omega)$ pour $u \in C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$ fixe.

On définit alors :

$$\begin{aligned} T : [0, 1] \times C^{1,\delta}(\bar{\Omega}) &\longrightarrow C^{1,\delta}(\bar{\Omega}) \\ (\sigma, u) &\longrightarrow v = T(\sigma, u) \end{aligned}$$

On montre, de la même façon que dans le cas $\sigma = 1$, que T est compacte.

Notons que $T(0, u) = 0 \quad \forall u \in C^{1, \delta}(\overline{\Omega})$.

On applique alors la :

Proposition 1.2 [3] :

Soit E un espace de Banach, T un opérateur compact de $[0, 1] \times E$ dans E tel que $T(0, u) = 0 \quad \forall u \in E$.

S'il existe M constante positive telle que l'égalité $u = T(\sigma, u)$ pour $u \in E$, $\sigma \in [0, 1]$, entraîne $\|u\|_E \leq M$, alors $T(\sigma, \cdot)$ admet un point fixe dans $B(0, M)$.

D'où les conclusions du théorème 1.2. $\square$

CHAPITRE II

ESTIMATIONS A PRIORI

En vue d'obtenir les conclusions du théorème 1.1 à partir du théorème 1.2 , on est amené à établir une estimation dans $C^{1, \delta}(\overline{\Omega})$ d'une solution quelconque $u \in W^{2, p}(\Omega)$ de (1-1) .

On énoncera d'abord un résultat de Ladyzenskaja - Ural'ceva [8] concernant l'estimation höldérienne du gradient de u . Ensuite , on établira une estimation de $\sup_{\Omega} |u|$ par application du principe du maxi-

mum . Estimation qu'on utilisera pour établir celle de $\sup_{\partial \Omega} |Du|$ (et

encore par le principe du maximum) .

Enfin on établira l'estimation globale du gradient de u en utilisant essentiellement les résultats de théorie des équations linéaires elliptiques .

II.1.- ESTIMATIONS HÖLDERIENNES DU GRADIENT .

On note par :

$$[v]_{\alpha, \Omega} = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

et on énonce :

Proposition 2.1 [] :

Sous l'hypothèse (H1) et b continue dans $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$,
soit $u \in W^{2,p}(\Omega)$ une solution de (1-1) .

On a alors l'estimation :

$$(2-1) \quad [Du]_{\alpha, \Omega} \leq C$$

où C est une constante positive dépendant de N, Ω, K ,

$K = \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |Du|$, v_1, μ_1 et M_K où :

$v_1 \leq v(|z|)$, $\mu_1 \geq \mu(|z|)$ pour $|z| \leq \sup_{\Omega} |u|$

et :

$$M_K \geq \left| \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right| + \left| \frac{\partial a_i}{\partial z} p_i \right| + |b| + \left| \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \right|$$

pour $|z| + |p| \leq K$ et $x \in \bar{\Omega}$.

On donne ici une idée de la méthode utilisée pour obtenir l'estimation intérieure de (2-1) . Pour la démonstration complète voir [] .

On écrit (1-1) sous forme variationnelle :

$$\int_{\Omega} \{ a_i(x, u, Du) D_i \xi - b(x, u, Du) \xi \} dx = 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

Soit k fixe entre 1 et N et on prend ξ sous la forme :

$$\xi = D_k \eta \quad \text{où} \quad \eta \in \mathcal{D}(\Omega) \quad .$$

L'identité intégrale précédente devient alors :

$$(2-2) \quad \int_{\Omega} \{ a_i(x, u, Du) D_{ik} \eta - b(x, u, Du) D_k \eta \} dx = 0$$

soit encore en intégrant par partie :

$$\int_{\Omega} \{ D_k (a_i(x, u, Du)) D_{ik} \eta + b(x, u, Du) D_k \eta \} dx = 0$$

c'est-à-dire en dérivant $a_i(x, u, Du)$ en x_k :

$$\int_{\Omega} \left\{ [D_{x_k} a_i(x, u, Du) + D_z a_i(x, u, Du) D_k u + D_{p_j} a_i(x, u, Du) D_{jk} u] D_{ik} \eta + b(x, u, Du) D_k \eta \right\} dx = 0 \quad .$$

On pose :

$$a_{ij}(x) = D_{p_j} a_i(x, u(x), Du(x))$$

$$f_k^i(x) = D_z a_i(x, u(x), Du(x)) D_k u(x) + D_{x_k} a_i(x, u(x), Du(x)) + \delta_{ik} b(x, u(x), Du(x))$$

où δ_{ik} désigne le symbole de Kronecker .

L'identité intégrale précédente devient alors :

$$(2-3) \quad \int_{\Omega} (a_{ij}(x) D_{jk} u + f_k^i(x)) D_i \eta dx = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On montre (2-1) pour un domaine $\Omega' \subset \Omega$ à partir de (2-3) par application des résultats de la théorie linéaire relatifs aux estimations höldériennes des solutions variationnelles d'équations linéaires elliptiques. Pour l'estimation höldérienne du gradient au voisinage du bord ainsi que pour les détails de l'estimation intérieure on renvoie à [8] et [7].

Remarque 2.1 :

L'estimation (2-1) est encore valable pour les solutions dans $W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, de l'équation générale (1-2) .

La proposition 2.1 ramène le problème d'existence de solution de (2-1) à estimer u dans $C^1(\bar{\Omega})$.

II.2.- ESTIMATION DE $\sup_{\Omega} |u|$.

On montre l'extension suivante du lemme 1.1 :

Proposition 2.2 :

Sous les hypothèses (H1), (H3) et b continue sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, soit $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, satisfaisant :

$$(2-4) \quad a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} u + \beta(x, u, Du) \geq 0 \quad \text{p.p. } \Omega$$

alors :

$$(2-5) \quad \sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial \Omega} u^+ + C \mu_2$$

où C est une constante positive dépendant de μ_2 et de $\text{diam } \Omega$.

En outre si :

$$a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} u + \beta(x, u, Du) = 0 \quad \text{p.p. } \Omega$$

alors :

$$(2-6) \quad \sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial \Omega} |u| + C \mu_2.$$

Preuve :

On applique le lemme 1.1 dans :

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega \text{ tels que } u(x) > 0\}.$$

Pour presque tout $x \in \Omega^+$ on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} u + \beta(x, u, Du) \\ &= a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} u + \beta(x, u, Du) \text{sign } u \\ &\leq a_{ij} D_{ij} u + \lambda \mu_1 (\text{sign } D_i u) D_i u + \lambda \mu_2 = Lu. \end{aligned}$$

On a donc $Lu \geq 0$ dans Ω^+ ; d'où d'après le lemme 1.1 :

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \mu_2$$

En remplaçant u par $-u$ on obtient (2-6) . $\square$

Remarque 2.2 :

a) Le résultat précédent est encore valable si on se place dans le cadre de l'hypothèse (H) de la section 1.2 au lieu de (H1) avec la condition :

$$\frac{\beta(x, z, p) \operatorname{sign} z}{\lambda(x, z, p)} \leq \mu_1 |p| + \mu_2$$

μ_1 et μ_2 constantes positives , $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

b) On peut utiliser d'autres résultats pour obtenir l'estimation de $\sup_{\Omega} |u|$ en utilisant directement la forme divergente (1-1) . Sous des hypothèses aussi restrictives que (H3) pour les a_i et b voir [7] .

II.3.- ESTIMATION DU GRADIENT AU BORD .

On écrit le problème (1-1) sous la forme générale :

$$(2-7) \quad \begin{cases} a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} u + \beta(x, u, Du) = 0 & \text{p.p.} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

et on formule les hypothèses (H1) et (H2) comme suit :

$$(2-8) \quad \nu(|z|) |\xi|^2 \leq a_{ij}(x, z, p) \xi_i \xi_j \leq \mu(|z|) |\xi|^2 \\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, (x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

$$(2-9) \quad |\beta(x, z, p)| \leq \mu(|z|) (1 + |p|)^2$$

où a_{ij} et β sont continues en x , z et p .

On énonce alors :

Proposition 2.3 :

Sous les hypothèses (H1) et (H2) , une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, de (2-7) (et donc de (1-1)) vérifie alors l'estimation :

$$(2-10) \quad \sup_{\partial\Omega} |Du| \leq C$$

où C est une constante positive dépendant de Ω , μ , ν et $M = \sup_{\Omega} |u|$.

Démonstration :

On considère $\varphi: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec $\varphi' > 0$ et $\varphi'' < 0$.

On pose alors le changement de fonction :

$$u = \varphi(v)$$

$$D_i u = \varphi' D_i v$$

$$D_{ij} u = \varphi' D_{ij} v + \varphi'' D_i v D_j v .$$

On considère :

$$\mathcal{L}_0 v = a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} v$$

• On va montrer que $\mathcal{L}_0 v \geq -C$ où $C = C_{ste} > 0$.

$$a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} u + \beta(x, u, Du) =$$

$$= a_{ij}(x, u, Du) [\varphi' D_{ij} v + \varphi'' D_i v D_j v] + \beta(x, u, Du)$$

$$= 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega .$$

Comme $\varphi' > 0$ et $\varphi'' < 0$ on a alors :

$$a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} v + \frac{\varphi''}{\varphi'} a_{ij}(x, u, Du) D_i v D_j v + \frac{\beta(x, u, Du)}{\varphi'} = 0$$

p.p. dans Ω .

En utilisant (2-8) et (2-9) on obtient :

$$a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} v = -\frac{\varphi''}{\varphi'} a_{ij}(x, u, Du) D_i v D_j v - \frac{\beta(x, u, Du)}{\varphi'} \geq$$

$$\geq -\frac{\varphi''}{\varphi'} v |Dv|^2 - \frac{\mu}{\varphi'} (1 + |Du|)^2$$

$$\geq -\frac{\varphi''}{\varphi'} v |Dv|^2 - 2 \frac{\mu}{\varphi'} |Du| - \frac{\mu}{\varphi'} |Du|^2 - \frac{\mu}{\varphi'}$$

soit encore :

$$(2-11) \quad a_{ij}(x, u, Du) D_{ij} v \geq \left(-\frac{\varphi''}{\varphi'} v - 2 \mu \varphi' \right) |Dv|^2 - \frac{2 \mu}{\varphi'}$$

p.p. dans Ω .

On choisit φ de sorte que :

$$-\frac{\varphi''}{\varphi'} v - 2 \mu \varphi' \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0 .$$

Soit φ définie par :

$$(2-12) \quad \varphi(t) = \frac{v}{2 \mu} \text{Log}(1+t)$$

Comme $u = \varphi(v)$, on a alors :

$$(2-13) \quad v = -1 + e^{\frac{2\mu}{v} u}.$$

Il résulte alors de (2-11) :

$$(2-14) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{ij}(x, u, Du) D_{ij} v &\geq -\frac{2\mu}{\varphi^1} = -\frac{4\mu^2}{\varphi^1} (1+v) = -\frac{4\mu^2}{v} e^{\frac{2\mu}{v} u} \\ \mathcal{L}_0 v &\geq -\frac{4\mu^2}{v} e^{\frac{2\mu}{v} M} \geq -C \quad \text{p.p.} \end{aligned}$$

• On considère la fonction distance :

$$\begin{aligned} d(x) &= \text{dist}(x, \partial\Omega) \\ |\text{grad } d| &= 1 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

On pose alors :

$$(2-15) \quad w = v + m e^{-Cd} \quad m \text{ constante positive}.$$

Soit $r_0 > 0$ tel que posant :

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \text{ tel que } d(x) < r_0\}$$

on ait :

$$d \in C^2(\bar{\Omega}_0) \quad \text{et} \quad |\text{grad } d| > \frac{1}{2} \quad \text{dans } \Omega_0.$$

On pose :

$$\Gamma_0 = \{x \in \Omega \text{ tel que } d(x) = r_0\}.$$

On a :

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega \cup \Gamma_0.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} w &= m \quad \text{sur } \partial\Omega \\ w &= v + m e^{-Cr_0} \quad \text{sur } \Gamma_0. \end{aligned}$$

$$\text{On choisit } m > (\max v) \left(1 - e^{-Cr_0}\right)^{-1}.$$

On a :

$$\max_{\partial\Omega_0} w = \max_{\partial\Omega} w = m.$$

En utilisant (2-14), (2-15) et (2-8) on obtient dans Ω_0 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_0 w &= \mathfrak{L}_0 v - \mathfrak{L}_0 m e^{-Cd} \geq -C + m e^{-Cd} [C \mathcal{Q}_{ij} D_i d D_j d - \mathcal{Q}_{ij} D_{ij} d] \\ &\geq -C + m e^{-Cd} \left[\frac{Cv}{2} - \mu M_0 \right] \end{aligned}$$

où :

$$M_0 = \max_{\mathfrak{L}_0} |D_{ij} d| .$$

On prend C suffisamment grand de sorte que :

$$C \frac{v}{2} > M_0 \mu$$

et :

$$\mathfrak{L}_0 w \geq -C + m e^{-r_0 C} \left(\frac{Cv}{2} - \mu M_0 \right) > 0 .$$

Par conséquent :

$$w \leq m$$

et donc :

$$v \leq m (1 - e^{-Cd}) .$$

On en déduit que pour $x_0 \in \partial \Omega$, $x \in \Omega$:

$$\frac{v(x) - v(x_0)}{|x - x_0|} = \frac{v(x)}{|x - x_0|} \leq \frac{v(x)}{d(x)} \leq m \left(\frac{1 - e^{-Cd(x)}}{d(x)} \right) .$$

Quand $x \rightarrow x_0$ on obtient alors :

$$(2-16) \quad \frac{\partial v}{\partial n}(x_0) \leq mC$$

ce qui établit une majoration du gradient au bord .

En effet , en explicitant (2-16) , on a :

$$\begin{aligned} (2-17) \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x_0) &= \varphi'(v(x_0)) \frac{\partial v}{\partial n} \leq \varphi'(v(x_0)) mC \\ &\leq \frac{v}{2\mu} \frac{mC}{1 + v(x_0)} \leq \frac{v}{2\mu} mC \end{aligned}$$

On établit de façon analogue une minoration du gradient au bord en

remplaçant u par $-u$:

$$(2-18) \quad \frac{\partial u}{\partial n} \leq -\frac{\nu}{2\mu} m C .$$

(2-17) et (2-18) entraînent (2-10) . $\square$

II.4. - ESTIMATION GLOBALE DU GRADIENT .

On montre dans cette section la :

Proposition 2.4 :

Sous les hypothèses (H1) et (H2) , soit $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, une solution de (1-1) . Alors on a l'estimation :

$$(2-19) \quad \sup_{\Omega} |Du| \leq C \left(1 + \sup_{\partial\Omega} |Du| \right)$$

où C est une constante positive dépendant de τ , $\nu(M)$, $\mu(M)$, N
 $\sup_{\Omega} |a(., u(.), 0)|$ où $M = \sup_{\Omega} |u|$.

Démonstration :

On commence d'abord par établir une estimation intérieure du gradient .

a) Estimation intérieure .

Proposition 2.5 :

Sous les hypothèses de la proposition 2.4 , on a alors :

$$(2-20) \quad |Du(y)| \leq C$$

pour tout $y \in \Omega$, C constante dépendant de N , τ , $\nu(M_0)$, $\mu(M_0)$,
 $\sup |a(., u(.), 0)|$, M_0 , $\frac{M_0}{d}$ où $M_0 = \sup_{B_d(y)} |u|$, $d = \text{dist}(y, \partial\Omega)$.

Démonstration de la proposition 2.5 :

On reprend l'identité intégrale (2-3) en remplaçant η par $D_k u \zeta$ où $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} (a_{ij}(x) D_{jk} u + f_k^i(x)) D_i (D_k u \zeta) dx = 0 .$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } a_{ij} D_{jk} u D_k u D_i \zeta + a_{ij} D_{jk} u D_{ik} u \zeta &= \\ &= (a_{ij} D_{jk} u D_{ik} u) \zeta + \frac{1}{2} a_{ij} D_j |Du|^2 D_i \zeta \end{aligned}$$

on pose alors :

$$v = |Du|^2 .$$

L'identité intégrale précédente devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a_{ij}(x) D_{ik} u D_{jk} u \zeta dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} a_{ij} D_j v + D_k u f_k^i \right) D_i \zeta dx \\ + \int_{\Omega} \zeta f_k^i D_{ik} u dx = 0 . \end{aligned}$$

En utilisant (H2) on obtient :

$$\begin{aligned} (2-21) \quad \int_{\Omega} v(1 + |Du|)^T \zeta |D^2 u|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} a_{ij} D_j v + D_k u f_k^i \right) \\ + \int_{\Omega} \zeta f_k^i D_{ik} u dx \leq 0 \quad \forall \zeta \geq 0 . \end{aligned}$$

On pose $\lambda = v(1 + |Du|)^T$.

L'inégalité de Young permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \zeta \sum_k f_k^i D_{ik} u dx &\leq \int_{\Omega} \zeta \sum_{k,i} \left(\lambda^{-1} |f_k^i|^2 + \lambda |D_{ik} u|^2 \right) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left[\zeta \lambda^{-1} \sum |f_k^i|^2 + \zeta \lambda |D^2 u|^2 \right] dx . \end{aligned}$$

(2-21) devient en conséquence :

$$\begin{aligned}
 (2-21) \quad & \int_{\Omega} \frac{1}{2} a_{ij} D_j v D_i \zeta \, dx + \int_{\Omega} \lambda \zeta |D^2 u|^2 \, dx - \int_{\Omega} \zeta \lambda |D^2 u|^2 \, dx \\
 & - \int_{\Omega} \zeta \lambda^{-1} \sum |f_k^i|^2 \, dx + \int_{\Omega} D_k u f_k^i D_i \zeta \, dx \leq 0 \\
 & \zeta \geq 0
 \end{aligned}$$

soit encore en posant :

$$\bar{v} = \int_0^v (1 + \sqrt{t})^{\tau} \, dt \quad \bar{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x) (1 + |Du(x)|)^{-\tau}$$

$$(2-22) \quad \int_{\Omega} (\bar{a}_{ij} D_j \bar{v} + 2 D_k u f_k^i) D_i \zeta \, dx \leq 2 \int_{\Omega} \zeta \lambda^{-1} \sum |f_k^i|^2 \, dx .$$

A partir de (2-22) on obtient une estimation locale de $\sup v$ par application de la :

Proposition 2.6 [7] :

Soit L un opérateur linéaire elliptique :

$$L = D_i (a_{ij} D_j + b_i) + c_i D_i + d$$

avec :

$$\begin{aligned}
 & a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \\
 & \sum |a_{ij}|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2} \sum (|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2) + \lambda^{-1} |d(x)| \leq \nu^2 \\
 & \lambda, \Lambda, \nu \text{ constantes positives.}
 \end{aligned}$$

Soient $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, $g \in L^{q/2}(\Omega)$ $q > N$.

Si u est sursolution de :

$$Lu = D_i f^i + g \quad \text{dans } \Omega$$

$u \in W^{1,2}(\Omega)$, alors pour toute $B_{2R}(y) \subset \Omega$ et $p > 1$:

$$(2-23) \quad \sup_{B_R(y)} u \leq C \left(R^{-\frac{N}{p}} \|u^+\|_{L^p(B_{2R}(y))} + k(R) \right)$$

$$\text{où } \bar{k}(R) = \lambda^{-1} \left(R^{1 - \frac{N}{q}} \|f\|_{L^q} + R^{2 - \frac{2N}{q}} \|g\|_{L^q} \right)$$

C constante positive dépendant de N , $\frac{1}{\lambda}$, νR , q , p .

$\bar{v}$, d'après (2-22), est sursolution d'une équation linéaire vérifiant les hypothèses de la proposition ci-dessus, avec $p = 2$. On a pour toute boule $B_{2R}(y) \subset \Omega$:

$$(2-24) \quad \sup_{B_{2R}(y)} \bar{v} \leq C \left(R^{-\frac{N}{2}} \|\bar{v}\|_{L^2(B_{2R})} + \bar{k}(R) \right)$$

$$\text{où } \bar{k}(R) = \lambda^{-1} \left(2R^{1 - \frac{N}{q}} \sum_i \left\| \sum_k D_k u f_k^i \right\|_{L^q} + R^{2 - \frac{2N}{q}} \|\lambda^{-1} \sum (f_k^i)^2\|_{L^{q/2}} \right)$$

D'après (H2) on a la majoration :

$$\begin{aligned} \|D_k u f_k^i\|_{L^q} &\leq \mu(M) \left(\int [|Du| (1 + |Du|)^{\tau+2}]^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \mu(M) \| (1 + |Du|)^{\tau+4} \|_{L^q} \end{aligned}$$

$$\text{où } M = \sup_{B_{2R}} |u|.$$

De même on obtient :

$$\| \sum (f_k^i)^2 \|_{L^{q/2}} \leq \mu(M) \| (1 + |Du|)^{\tau+4} \|_{L^q}^2.$$

(2-24) devient alors :

$$\sup_{B_R(y)} \bar{v} \leq C \left(R^{-\frac{N}{2}} \|\bar{v}\|_{L^2(B_{2R})} + \| (1 + |Du|)^{\tau+4} \|_{L^q(B_{2R})} \right)$$

C dépendant de n , $\nu(M)$, $\mu(M)$, τ , q , Ω .

En utilisant la relation entre v et $\bar{v}$ on obtient :

$$(2-25) \quad \sup_{B_{2R}} v \leq C$$

C constante dépendant de n , $\nu(M)$, $\mu(M)$, τ , $\text{diam } \Omega$ et de manière continue de :

$$R^{-N} \int_{B_{2R}(y)} v^r dx$$

pour r assez grand .

(2-25) montre que l'estimation intérieure du gradient se ramène à l'estimation L^r de Du .

1- Estimation L^r du gradient .

On reprend la forme faible de (1-1) :

$$\int_{\Omega} \{ a_i(x, u(x), Du(x)) D_i \zeta - b(x, u(x), Du(x)) \zeta \} dx = 0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

On prend ζ de la forme :

$$\begin{aligned} \zeta &= \eta^2 [u - u(y)] ; \quad \eta \in \mathcal{D}(B_{2R}) , \quad B_{2R} \subset \Omega \\ \int_{\Omega} a_i(x, u, Du) [2 \eta D_i \eta (u - u(y)) + \eta^2 D_i u] dx - \\ &- \int_{\Omega} b(x, u, Du) \eta^2 [u - u(y)] dx = 0 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} (2-26) \quad & \int_{\Omega} \eta^2 a_i(x, u, Du) D_i u + 2 \int_{\Omega} a_i(x, u, Du) \eta D_i \eta [u - u(y)] dx \\ & - \int_{\Omega} \eta^2 b(x, u, Du) [u - u(y)] dx = 0 . \end{aligned}$$

Avant de poursuivre la démonstration , pour majorer convenablement $\|v\|_{L^r}$, on remarque que les hypothèses (H1) et (H2) entraînent que :

$$(2-27) \quad \begin{cases} |a_i(x, z, p)| \leq \mu_1(|z|) (1 + |p|)^{\tau+1} \\ p_i a_i(x, z, p) \geq \nu_1(|z|) |p|^{\tau+2} - \mu_1(|z|) \end{cases}$$

pour tout $(x, z, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, μ_1 , ν_1 fonctions positives respectivement non décroissante et non croissante dépendant de τ , μ , ν et $\sup_{\Omega} |a_i(x, u, 0)|$, $i = 1, \dots, n$.

(2-27) s'obtient à partir de (H1) et H2) en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale.

Utilisant (2-27) dans (2-26) on obtient :

$$\begin{aligned}
 (2-28) \quad & \nu_1 \int_{\Omega} \eta^2 |Du|^{\tau+2} dx \leq \\
 & \leq \mu_1 \int_{\Omega} \eta^2 dx + \mu \int_{\Omega} \eta^2 |u(x) - u(y)| (1 + |Du|)^{\tau+2} dx \\
 & + 2\mu_1 \int_{\Omega} |\eta D\eta| |u(x) - u(y)| (1 + |Du|)^{\tau+1} dx.
 \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{\Omega} |\eta D\eta| |u(x) - u(y)| (1 + |Du|)^{\tau+1} dx \leq \\
 & \leq 2\omega(R) \int_{\Omega} |\eta| |D\eta| (1 + |Du|) (1 + |Du|)^{\tau} dx \\
 & \leq \omega(R) \int_{\Omega} |\eta|^2 (1 + |Du|)^{\tau+2} dx + \int_{\Omega} |D\eta|^2 (1 + |Du|)^{\tau} dx
 \end{aligned}$$

où :

$$\omega(R) = \sup_{B_{2R}} |u(x) - u(y)|$$

et :

$$(1 + |Du|)^{\tau+2} \leq 2^{\tau+1} (1 + |Du|^{\tau+2})$$

(2-28) devient :

$$\begin{aligned} & \nu_1 \int_{\Omega} \eta^2 |Du|^{\tau+2} dx + 4(\mu + \mu_1) 2^\tau w(R) \int_{\Omega} \eta^2 (1 + |Du|^{\tau+2}) dx \\ & + \mu_1 w(R) \int_{\Omega} (1 + |Du|)^\tau |D\eta|^2 dx . \end{aligned}$$

On choisit R assez petit de sorte que :

$$w(R) \leq \frac{\nu_1 2^{-\tau}}{8(\mu + \mu_1)}$$

d'où :

$$(2-29) \quad \int_{\Omega} \eta^2 |Du|^{\tau+2} dx \leq C \int_{\Omega} \eta^2 + w(R) (1 + |Du|)^\tau |D\eta|^2 dx$$

où C dépend de μ, μ_1, ν_1, τ .

On remplace dans (2-29) η par $\eta v^{(\beta+1)/2}$ pour $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \eta^2 v^{\beta+1} |Du|^{\tau+2} dx = \int_{\Omega} \eta^2 |Du|^{2\beta + \tau + 4} dx \\ & \leq C \int_{\Omega} \left\{ \eta^2 v^{\beta+1} + w(R) (1 + |Du|)^\tau |D\eta v^{(\beta+1)/2} + \frac{\eta(\beta+1)}{2} v^{(\beta-1)/2} |Dv|^2 \right\} dx \\ & \leq C \left\{ \int_{\Omega} [\eta^2 |Du|^{2(\beta+1)} + w(R) (1 + |Du|)^\tau |D\eta|^2 |Du|^{2(\beta+1)}] dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega} (\beta+1)^2 w(R) (1 + |Du|)^\tau \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 dx \right\} . \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} (2-30) \quad & \int_{\Omega} \eta^2 |Du|^{2\beta + \tau + 4} dx \leq \\ & \leq C \int_{\Omega} \left\{ |Du|^{2(\beta+1)} (\eta^2 + w(R) (1 + |Du|)^\tau |D\eta|^2) \right. \\ & \quad \left. + (\beta+1)^2 w(R) (1 + |Du|)^\tau \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 \right\} dx . \end{aligned}$$

On examine le terme $\int_{\Omega} (\beta+1)^2 w(R) (1 + |Du|)^\tau \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 dx$.

Lemme 2.1 :

$$(2-31) \quad \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 dx \leq \\ \leq C \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+2} (\eta^2 (1 + |Du|)^2 + |D\eta|^2) dx$$

Démonstration du lemme 2.1 :

On reprend l'inégalité (2-21)' qui s'écrit :

$$\int_{\Omega} (a_{ij} D_j v D_i \zeta + 2 D_k u f_k^i D_i \zeta) dx \leq 2 \int_{\Omega} \zeta \lambda^{-1} \sum |f_k^i|^2 dx .$$

On prend $\zeta = \eta^2 v^{\beta}$.

$$(2-32) \quad \int_{\Omega} (a_{ij} D_j v + 2 D_k u f_k^i) D_i (\eta^2 v^{\beta}) dx \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\Omega} \eta v^{\beta} \sum (f_k^i)^2 dx .$$

En remarquant que $D_i (\eta^2 v^{\beta}) = 2 \eta D_i \eta v^{\beta} + \eta^2 v^{\beta-1} D_i v$ et en utilisant (H1) on obtient :

$$\int_{\Omega} a_{ij} D_j v 2 \eta D_i \eta v^{\beta} dx + \int_{\Omega} a_{ij} D_i v D_j v \eta^2 v^{\beta-1} dx \geq \\ \geq \int_{\Omega} a_{ij} D_j v 2 \eta D_i \eta v^{\beta} dx + \beta v \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 dx .$$

Le premier terme du second membre de l'inégalité ci-dessus se majore grâce à (H1) comme suit :

$$2 \int_{\Omega} a_{ij} D_j v D_i \eta v^{\beta} dx \leq C \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} |D\eta| v^{\beta} |Dv| dx .$$

D'autre part :

$$2 \int_{\Omega} D_k u f_k^i D_i (\eta^2 v^{\beta}) dx = \\ = 2 \int_{\Omega} [D_k u f_k^i (2 \eta D_i \eta v^{\beta}) + D_k u f_k^i \eta^2 v^{\beta-1} D_i v] dx$$

qui se majore en utilisant (H3) sous la forme :

$$2 \left| \int_{\Omega} D_k u f_k^i D_i (\eta^2 v^2) dx \right| \leq \\ \leq C \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau+3} (\eta^2 v^{\beta} |D\eta| + \beta \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|) dx$$

Le second membre de (2-32) se majore :

$$2 \int_{\Omega} \eta^2 v^{\beta} \sum (f_k^i)^2 \leq C \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau+4} \eta^2 v^{\beta} dx .$$

(2-32) permet d'avoir , compte-tenu des inégalités précédentes :

$$(2-33) \quad \beta v \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 dx \leq \\ \leq C \int_{\Omega} \left\{ (1 + |Du|)^{\tau} \eta v^{\beta} |D\eta| |Dv| \right. \\ \left. + (1 + |Du|)^{\tau+3} (\eta v^{\beta} |D\eta| + \beta v^{\beta-1} \eta^2 |Dv|) \right. \\ \left. + \eta^2 (1 + |Du|)^{\tau+4} v^{\beta} \right\} dx .$$

Les constantes C qui sont notées indifféremment de la même façon dépendent de μ, ν .

On utilise l'inégalité de Young pour chaque terme de (2-33) afin de transformer cette dernière :

$$\bullet \quad C \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} \eta v^{\beta} |D\eta| |Dv| dx \leq \\ \leq \frac{\beta \nu}{3} \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 dx \\ + \frac{3C^2}{\beta \nu} \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} v^{\beta+1} |D\eta|^2 dx \\ \leq \frac{\beta \nu}{3} \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 dx \\ + \frac{3C^2}{\beta \nu} \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau+2\beta+2} |D\eta|^2 dx .$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet C \int_{\Omega} \beta \eta^2 v^{\beta-1} |Dv| (1 + |Du|)^{\tau+3} dx \leq \\
 & \leq \frac{\beta v}{3} \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 dx \\
 & \quad + \frac{3C}{v} \int_{\Omega} \eta^2 v^{\beta-1} (1 + |Du|)^{\tau} (1 + |Du|)^6 dx \\
 & \leq \frac{\beta v}{3} \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 dx \\
 & \quad + \frac{3C}{v} \int_{\Omega} \eta^2 (1 + |Du|)^{\tau+2\beta+4} dx .
 \end{aligned}$$

On majore d'autre part les deux autres termes :

$$\begin{aligned}
 & \bullet C \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau+3} \eta v^{\beta} |D\eta| dx \leq \\
 & \leq C \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau+2} v^{\beta} (\eta^2 (1 + |Du|)^2 + |D\eta|^2) dx \\
 & \leq C \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau+2\beta+2} (\eta^2 (1 + |Du|)^2 + |D\eta|^2) .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet C \int_{\Omega} \eta^2 (1 + |Du|)^{\tau+4} v^{\beta} dx \leq \\
 & \leq C \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+2} \eta^2 (1 + |Du|)^2 dx .
 \end{aligned}$$

(2-33) devient alors :

$$\begin{aligned}
 (2-34) \quad & \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{\tau} \eta^2 v^{\beta-1} |Dv|^2 dx \leq \\
 & \leq C \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+2} (\eta^2 (1 + |Du|)^2 + |D\eta|^2) dx
 \end{aligned}$$

ce qui est exactement l'inégalité du lemme 2.1 . $\square$

On reprend maintenant l'inégalité (2-30) .

Si $w(R)$ est suffisamment petit , on obtient alors par substitution dans (2-30) :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \eta^2 (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+4} dx &\leq 2^{2\beta+\tau+3} \int_{\Omega} [1 + |Du|^{2\beta+\tau+4}] \eta^2 dx \\
 &\leq 2^{2\beta+\tau+3} \int_{\Omega} \eta^2 dx + 2^{2\beta+\tau+3} \int_{\Omega} \eta^2 |Du|^{2\beta+\tau+4} dx \\
 &\leq 2^{2\beta+\tau+3} \int_{\Omega} \eta^2 dx + Cste \left(\int_{\Omega} \eta^2 |Du|^{2(\beta+1)} + \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+2} |D\eta|^2 dx \right. \\
 &\quad \left. + w(R) \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+2} (\eta^2 (1 + |Du|)^2 + |D\eta|^2) dx \right) \\
 &\leq Cste \left\{ \int_{\Omega} \eta^2 (1 + |Du|)^{2(\beta+1)} + (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+2} |D\eta|^2 dx \right. \\
 &\quad \left. + w(R) \int_{\Omega} \eta^2 (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+4} dx + \int_{\Omega} (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+2} |D\eta|^2 dx \right\}
 \end{aligned}$$

pour $w(R)$ petit ($Cste w(R) < \frac{1}{2}$) . On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 (2-35) \quad \int_{\Omega} \eta^2 (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+4} dx &\leq \\
 &\leq C \int_{\Omega} \left\{ \eta^2 (1 + |Du|)^{2(\beta+1)} + |D\eta|^2 (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+2} \right\} dx
 \end{aligned}$$

où C dépendant de μ, ν, β, τ .

On remplace η par $\eta^{(2\beta+\tau+4)/2}$ dans (2-35) :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} [\eta (1 + |Du|)]^{2\beta+\tau+4} dx &\leq C \int_{\Omega} \left\{ \eta^{2\beta+\tau+4} (1 + |Du|)^{2(\beta+1)} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{2\beta+\tau+4}{2} \right)^2 \eta^{2\beta+\tau+2} |D\eta| (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+2} \right\} dx
 \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Young pour majorer " convenablement " les deux termes sous intégrale du second membre de l'inégalité précédente.

$$\bullet \quad C \int_{\Omega} \eta^{2\beta+\tau+4} (1 + |Du|)^{2(\beta+1)} dx \leq Cste + \frac{1}{3} \int_{\Omega} [\eta(1 + |Du|)]^{2\beta+\tau+4} dx .$$

$$\bullet \quad C \int_{\Omega} \eta^{2\beta+\tau+2} |D\eta|^2 (1 + |Du|)^{2\beta+\tau+2} dx \leq Cste \int_{\Omega} |D\eta|^2 dx + \frac{1}{3} \int_{\Omega} [\eta(1 + |Du|)]^{2\beta+\tau+4} dx .$$

D'où :

$$(2-36) \quad \int_{\Omega} [\eta(1 + |Du|)]^{2\beta+\tau+4} dx \leq C$$

C dépendant de $\mu, \nu_1, \mu_1, \beta, \tau$ et $\sup |D\eta|$.

On choisit η telle que :

$$\eta = 1 \text{ sur } B_R(y) \text{ et } |D\eta| \leq \frac{2}{R} .$$

(2-36) devient alors pour $r \geq 1$:

$$(2-37) \quad \int_{B_R(y)} (1 + |Du|)^r dx \leq C$$

où C dépend de $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, r, \tau, R^{-1}$.

Ce qui achève donc l'estimation locale de $\int_B v^r dx$.

On reprend l'estimation locale de $\sup v$, à savoir (2-25), elle devient en la combinant avec (2-37) :

$$(2-38) \quad \sup_{B_{2R}} v \leq Cste$$

où Cste dépend de $n, \tau, \nu, \mu, \nu_1, \mu_1, [u]_{\alpha, y}, 0 < \alpha < 1$

avec :

$$[u]_{\alpha, y} = \sup_{B_{2R}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

De (2-25) on obtient pour toute boule $B_{R_0}(y) \subset \Omega$ et $0 < \alpha < 1$:

$$(2-39) \quad |Du(y)| \leq C$$

où C ayant les mêmes dépendances que dans (2-25) .

L'estimation intérieure du gradient se ramène donc à l'estimation höldérienne intérieure de u .

2- Estimation höldérienne de u .

On reprend les hypothèses (H2) et (2-27) sous la forme :

$$(2-40) \quad \begin{cases} |a_i(x, z, p)| \leq \mu_0 |p|^{m-1} + \chi_1^{m-1} \\ p_i a_i(x, z, p) \geq \nu_0 |p|^m - \chi_2^m \\ b(x, z, p) \leq \delta_0 |p|^m + \chi_3^m \end{cases}$$

où : $m = \tau + 2, \nu_0 = \nu_1(M), \delta = \mu(M)$

$$\mu_0 = \chi_1^{\tau+1} = \chi_1^{\tau+2} = \chi_3^{\tau+2} = u_1(M)$$

$$M = \sup_{\Omega} |u|.$$

On énonce alors un résultat d'estimations höldériennes (locales) des solutions faibles bornées des équations de type (1-1) .

Proposition 2.7 [12] :

Sous des hypothèses de type (2-29) , soit u une solution faible bornée de (4-1) ; alors u est localement höldérienne dans Ω et on a pour toute boule $B_o = B_{R_o}(y) \subset \Omega$ et $R \leq R_o$:

$$(2-41) \quad \text{osc}_{B_R(y)} u \leq C(1 + R_o^{-\alpha} M_o) R^{\alpha}$$

où C constante dépendant de $n, \nu_o, \mu_o, \delta_o, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ et M_o ,
 α dépendant de $n, \mu_o, \delta_o, \chi_1, \chi_2, \chi_3, m$ et $M_o = \sup_{B_o} |u|$.

Les estimations (2-39) et (2-41) permettent d'achever la démonstration de l'estimation intérieure du gradient , c'est-à-dire le résultat de la proposition 2.5 . $\square$

Suite de la démonstration de la proposition 2.4 :

Pour obtenir l'estimation globale du gradient, c'est-à-dire le résultat de la proposition 2.4 , on estime le gradient au voisinage de la frontière de Ω .

b) Estimation au voisinage de la frontière .

On reprend l'inégalité (2-22) :

$$\int_{\Omega} (\bar{a}_{ij} D_j \bar{v} + 2 D_k u f_k^i) D_i \zeta \, dx \leq 2 \int_{\Omega} \zeta \lambda^{-1} \sum (f_k^i)^2 \, dx$$

où $\bar{v}$ apparaît comme sous-solution d'une équation linéaire à laquelle on applique l'analogue de (2-23) de la proposition 2.6 au voisinage de la frontière .

Proposition 2.8 [12] :

Soit L un opérateur linéaire vérifiant les hypothèses de la proposition 2.6 et soit u une sous-solution de :

$$Lu = D_i f^i + g \quad \text{dans } \Omega .$$

On a alors pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $R > 0$, $p > 1$:

$$(2-42) \quad \sup u_N^+ \leq C \left(R^{-\frac{N}{p}} \|u_N^+\|_{L^p(B_{2R})} + k(R) \right)$$

où :

$$N = \sup_{\partial \Omega \cap B_{2R}} u^+$$

$$u_N^+(x) = \begin{cases} \sup \{ u(x), N \} & \text{si } x \in \Omega \\ N & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}$$

$$k = \lambda^{-1} \left(\|f\|_{L^q} + \|g\|_{L^{q/2}} \right) ; C = C \left(N, \frac{1}{\lambda}, \nu R, q, r \right) .$$

On prend $x_0 \in \Omega$, $B_R = B_R(x_0)$ et on pose :

$$\Omega_R = B_R(x_0) \cap \Omega .$$

On applique alors la proposition à $\bar{v}$.

$$(2-43) \quad \sup_{\Omega_R} \bar{v}_N \leq C \left(R^{-\frac{N}{2}} \|\bar{v}_N\|_{L^2} + \|(1 + |Du|)^{r+4}\|_{L^q} \right) .$$

Comme précédemment, on se ramène à établir une estimation L^r sur Ω_R , ce qui s'établit de la même manière que dans le cas de l'estimation intérieure. On exprimera alors $\sup_{\Omega_R} v$ en fonction du terme hölderien :

$$\sup_{\Omega_{R_0}} \frac{|u(x_0) - u(x)|}{|x_0 - y|^\alpha} .$$

Ce terme s'estime en utilisant un résultat analogue à la proposition 2.7 au voisinage de la frontière .

Proposition 2.9 [12] :

Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 2.7 , $\partial\Omega$ satisfaisant la condition du cône en tout $x_0 \in \partial\Omega$, alors pour toute boule $B_{R_0}(x_0)$, $R_0 > 0$, $R \leq R_0$:

$$(2-44) \quad \operatorname{osc}_{\Omega \cap B_R} u \leq C \left(1 + R_0^{-\alpha} \operatorname{osc}_{\Omega \cap B_{R_0}} u \right)$$

C , α ayant les mêmes dépendances que dans la proposition 2.7 .

De (2-43) et (2-44) on obtient une estimation du gradient au voisinage de la frontière .

L'estimation intérieure et l'estimation au voisinage de la frontière donnent le résultat de la proposition 2.4 c'est-à-dire l'estimation globale du gradient . $\square$

La proposition 2.4 achève l'estimation dans $C^1(\bar{\Omega})$ d'une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$. On est donc en position d'appliquer le théorème 1.2 et on en déduit donc l'existence de solutions de (1-1) dans $W^{2,p}(\Omega)$. Ce qui établit le théorème 1.1 . $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS R.A. :

Sobolev Spaces .
Academic Press 1975 .

[2] AGMON S. - DOUGLIS A. - NIRENBERG L. :

Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying gradient boundary conditions I .
Comm. Pure Appl. Math. 12 , 623-727 , (1959) .

[3] BERESTYCKI H. :

Méthodes topologiques et problèmes aux limites non linéaires . Thèse 3^{ème} cycle , Paris VI , 1975 .

[4] BONY J.M. :

Principe du maximum dans les espaces de Sobolev .
C.R. Acad. Sci. Paris , Sér. A , T. 265 , n° 12 , 333-336 , (1967) .

[5] CHICCO M. :

Solvability of the Dirichlet problem in $H^{2,p}(\Omega)$ for a class of linear second order elliptic partial differential equations .
Boll. Un. Mat. Ital. (4) , 4 , 374-387 (1971) .

[6] EDMUNDS D.E. :

Quasilinear second order elliptic and parabolic equations . Bull. of the London Math. Soc. 2 , 5-28 , (1970) .

[7] GILBARG D. - TRUDINGER N.S. :

Elliptic partial differential equations of second order.
Springer-Verlag , Berlin , 1977 .

[8] LADYZENSKAJA O.A. - URAL' CEVA N.N. :

Equations aux dérivées partielles de type elliptique.
Dunod , Paris , 1969 .

[9] MIRANDA C. :

Partial differential equations of elliptic type .
Springer-Verlag , Berlin , 1970 .

[10] SERRIN J. :

The problem of Dirichlet for quasi-linear elliptic
differential equations with many independent variables.
Philos. Trans. Roy. Soc. London , Ser. A 264 ,
413-496 (1969) .

[11] SERRIN J. :

Gradient estimates for solutions of nonlinear elliptic
and parabolic equations .
Contributions to nonlinear functional analysis , pp.
565-601 , New-York , Academic Press , 1971 .

[12] TRUDINGER N.S. :

On Harnack - Type inequalities and their applications
to quasi-linear elliptic equations .
Comm. Pure Appl. Math. 20 , 721-747 , (1967) .

[13] TRUDINGER N.S. :

Some existence theorems for quasi-linear non - uni -
formly elliptic equations in divergence form .
J. of Math. and Mech. Vol. 18 , n° 9 , (1969) .

Résumé

Sur une résolution directe de problèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques .

On étudie des problèmes paraboliques de type :

$$(2-1) \quad \begin{cases} u_t = \operatorname{div} \partial J(\operatorname{grad} u) + f & \text{dans } Q \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega(0) \end{cases}$$

où Q est un ouvert non cylindrique de frontière latérale Σ et de section $\Omega(t)$ dépendant du temps de manière à variation bornée, J une fonction convexe de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

On ramène l'existence de solutions de (2-1) à l'application d'un résultat abstrait d'existence de solutions fortes d'équations d'évolution gouvernées par les sous-différentiels de fonctions convexes s.c.i. propres dépendant du temps de type :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \partial \varphi^t(u) \ni f \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

On examine plus particulièrement les cas de dimension 1 et l'équation de la chaleur en établissant deux théorèmes d'existence et d'unicité de solutions .

Mots clés : Equation parabolique , sous-différentiel ,
Ouvert non cylindrique

Existence de solutions dans $W^{2,p}(\Omega)$ d'équations quasi - linéaires elliptiques .

On montre un théorème d'existence de solutions dans $W^{2,p}(\Omega)$, $p > N$, de :

$$(E) \quad \begin{cases} \operatorname{div} a(x, u, Du) + b(x, u, Du) = 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On utilise l'estimation $W^{2,p}(\Omega)$ des solutions d'équations linéaires elliptiques et le théorème de point fixe de Schaefer pour ramener le problème d'existence à établir des estimations a priori dans $C^{1,\delta}(\overline{\Omega})$, $\delta < 1 - \frac{N}{p}$. Sous des hypothèses de régularité sur les fonctions a et b ne permettant pas d'avoir de solutions classiques de (E) et avec une démarche analogue à celle du cas classique, on établit successivement, pour une solution a priori u de (E) les estimations : $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|Du\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$, $\|Du\|_{L^\infty(\Omega)}$ et l'estimation höldérienne de Du .

Mots clés : Equation quasi-linéaire elliptique ,
Espace de Sobolev